

## VISUALISASI FENOMENA HARMONIS DAN CHAOS PADA GETARAN TERGANDENG BERBASIS KOMPUTASI NUMERIK RUNGE KUTTA

*Leonora L. R. Trifina<sup>1</sup>, Ali Warsito<sup>2</sup>, Laura A. S. Laponi<sup>3</sup>, Andreas Ch. Louk<sup>4</sup>*

*Program Studi Fisika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana Jl. Adisucipto-Penfui,  
Kupang, NTT, 85001, Indonesia  
E-mail: ichatrifina988@gmail.com*

### Abstrak

Telah dilakukan penelitian tentang visualisasi fenomena harmonis dan chaos pada kasus fisis getaran terdangeng dengan metode komputasi numerik Runge Kutta dengan tujuan menerapkan metode komputasi Runge Kutta orde satu sampai empat untuk memperoleh solusi persamaan diferensial orde dua pada sistem getaran terdangeng, menghitung nilai perpindahan benda menggunakan metode komputasi Runge Kutta orde satu sampai empat, memperoleh grafik perpindahan benda terhadap waktu pada kasus getaran terdangeng untuk keadaan harmonis dan chaos pada nilai lebar langkah tertentu, serta membandingkan kekonvergenan metode Runge Kutta dari orde satu sampai empat dengan metode Analitik Khusus. Solusi dari persamaan getaran terdangeng yang tergolong dalam persamaan diferensial orde dua cukup sulit diselesaikan secara analitik sehingga untuk menyelesaikannya dimanfaatkan metode komputasi Runge Kutta sebagai solusi alternatif. Hasil penelitian menunjukkan keadaan harmonis sistem diperoleh saat grafik perpindahan memperlihatkan gerak masing-masing pendulum yang konstan dengan posisi perpindahan pendulum terhadap waktu berupa grafik sinusoidal pada nilai  $C_1 = 40 \text{ N/m}$ ,  $C_2 = 30 \text{ N/m}$ ,  $C = 10 \text{ N/m}$ ,  $C = 0 \text{ N/m}$  dan keadaan chaos digambarkan dengan grafik perpindahan pendulum terhadap waktu dengan pola yang tidak beraturan. Pada kasus ini diperoleh hasil bahwa metode Runge Kutta orde empat lebih cepat konvergen dari metode Runge Kutta orde satu sampai tiga dengan hasil terbaik diperoleh pada nilai lebar langkah 0,001. Metode Runge Kutta orde empat juga memiliki nilai eror rata-rata pendekatan lebih kecil dari metode Runge Kutta orde satu sampai tiga yakni  $1 \times 10^{-11}$  pada metode Runge Kutta orde empat dan nilai eror rata-rata berturut-turut adalah  $5,029945707121 \times 10^{-3}$ ,  $2,951357802047 \times 10^{-3}$  dan  $9,908989611342 \times 10^{-4}$  pada metode Runge Kutta orde satu sampai tiga.

**Kata kunci:** Getaran terdangeng; fenomena harmonis; chaos; komputasi numerik; metode runge kutta

### Abstract

Research has been carried out on the visualization of harmonic and chaos phenomenon on coupled vibration physical case using the Runge Kutta numerical computation method with the aim of applying the first to fourth order Runge Kutta computation method to obtain a second order differential equation solution on coupled vibration system, calculating the displacement value of objects using computation method Runge Kutta order first to fourth, obtained a graph of the displacement of objects against time in case of coupled vibration for harmonic and chaos states at certain step width values and compare the convergence of the Runge Kutta method from first to fourth order with the special analytical method. The solution of coupled vibration equation which is classified as a second order differential equation was quite difficult to solve analytically, so the Runge Kutta computation method was used to solve it as an alternative solution. The results of the research showed that the harmonic state of the system was obtained when the displacement graph showed the motion of each pendulum which was constant with the pendulum displacement position with respect to time in the form of a sinusoidal graph at a value of  $C_1 = 40 \text{ N/m}$ ,  $C_2 = 30 \text{ N/m}$ ,  $C = 10 \text{ N/m}$ ,  $C = 0 \text{ N/m}$  and the chaotic state was represented by a graph of the displacement of the pendulum with respect to time with an irregular pattern. In this case, it was found that the fourth order Runge Kutta method converged faster than the first to third order Runge Kutta method with the best results obtained at a step width value of 0,001. The fourth order Runge Kutta method also has a smaller approximation average error value from first to third order Runge Kutta method was  $1 \times 10^{-11}$  on the fourth order Runge Kutta method and the average error values are  $5,029945707121 \times 10^{-3}$ ,  $2,951357802047 \times 10^{-3}$  and  $9,908989611342 \times 10^{-4}$  on the Runge Kutta method of first to third order.

**Keywords:** Coupled vibration; harmonic phenomenon; chaos; numerical computation; runge kutta method

## PENDAHULUAN

Getaran secara teknik didefinisikan sebagai gerak osilasi dari suatu obyek terhadap posisi awalnya [1] dan menjadi bagian dari salah satu fenomena alam. Persoalan getaran berkembang tidak hanya pada masalah idealisasi dan kepraktisan, tetapi juga pada akurasi perhitungan. Karakteristik getaran random terjadi pada fenomena gempa bumi, angin dan kebisingan yang berasal dari mesin.

Peristiwa getaran dapat diklasifikasikan berdasarkan ada tidaknya eksitasi yang bekerja secara kontinyu, menurut derajat kebebasannya atau menurut sistem massanya [2]. Dalam bidang kajian fisika dikenal adanya sistem getaran terdang yang tergolong dalam peristiwa getaran berdasar pada derajat kebebasan, dimana banyaknya koordinat bebas (*independence*) diperlukan untuk mendefinisikan persamaan gerak sistem. Aplikasi teknis dalam sains dan teknik dari fenomena fisis ini seperti, pembangunan gedung pencakar langit.

Dalam menelaah sistem fisis getaran selaras terdang yang persamaan gerak sistemnya tergolong dalam persamaan diferensial linear orde kedua dan untuk menemukan solusi dari persamaan tersebut cukup rumit diselesaikan secara analitik, membutuhkan waktu yang lama serta kemungkinan akurasi yang diperoleh kurang maksimal. Pemahaman mekanika menyebutkan bahwa sistem dengan derajat kebebasan tertentu disebut sebagai sistem diskrit dan sistem dengan derajat kebebasan tak terhingga disebut sebagai sistem kontinyu [3]. Dalam tinjauan sistem getaran terdang yang tergolong dalam sistem diskrit karena derajat kebebasan yang terbatas 2 maka, untuk mendapati solusi terhadap pendekatan masalahnya diperlukan perhitungan numerik dan bantuan komputer untuk menganalisis getaran secara kompleks. Adapun proses menganalisis masalah-masalah fisis dengan metode numerik dan bantuan komputer seperti ini biasa disebut dengan fisika komputasi [4].

Terdapat beberapa metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan ini diantaranya Metode Euler dan Metode Runge Kutta. Dimana dalam tinjauan kasus ini dimanfaatkan Metode Runge Kutta dengan prinsip menggunakan titik-titik lanjutan pada tiap-tiap langkah interval dengan harapan

untuk meningkatkan akurasi. Pemilihan metode ini didasarkan pada perbedaan tingkat akurasinya dan menjadi bagian dari metode yang dapat menyelesaikan persamaan diferensial yang rumit, sehingga dapat membandingkan solusi yang didapat dan kecepatan konvergensinya.

Penelitian mengenai getaran terdang telah dilakukan sebelumnya oleh

[5] dan [6] juga oleh [7]. Penelitian-penelitian tersebut di atas hanya bertujuan memverifikasi bahwa pada fenomena getaran 2 massa terdang terjadi keadaan harmonis atau selaras sehingga di kaji lebih lanjut dengan menelisik keadaan transisi dari harmonik atau selaras menuju *chaos*, dengan masih terkait dengan variasi massa dan konstanta pegas.

Penelitian ini dilakukan dengan tujuan menerapkan metode komputasi numerik Runge Kutta orde satu sampai empat untuk mendapati solusi persamaan diferensial orde 2 pada sistem getaran terdang, memperoleh nilai perpindahan pendulum terhadap waktu pada nilai lebar langkah ( $h$ ) tertentu, serta melakukan interpretasi visualisasi fenomena getaran terdang untuk keadaan harmonis dan keadaan *chaos* didasarkan variasi massa, kelajuan awal benda dan konstanta pegas pada sistem.

## Getaran

Getaran merupakan gerakan berosilasi dari sistem mekanis serta kondisi-kondisi dinamisnya. Getaran dapat berupa benturan yang berulang secara kontinyu atau dengan kata lain dapat pula berupa gerakan tidak beraturan atau acak.

## Getaran Selaras Terdang

Getaran suatu sistem yang memiliki gaya pemulih sebanding dengan besarnya simpangan, maka keadaan ini disebut sebagai gerak harmonik sederhana [8]. Gaya pemulih cenderung memulihkan pegas ke konfigurasi awalnya [9]. Getaran selaras terdang identik dengan sistem getaran dua derajat kebebasan dimana sistem ini memiliki dua frekuensi natural dan memerlukan dua koordinat untuk menyatakan persamaan geraknya. Persamaan gerak sistemnya tergolong dalam persamaan diferensial yaitu

$$-M \frac{d^2 x_1}{dt^2} - C_1 x_1 + C(x_2 - x_1) = 0 \quad (1)$$

$$-M \frac{d^2 x_2}{dt^2} - C_2 x_2 - C(x_2 - x_1) = 0 \quad (2)$$

### Metode Runge-Kutta

Penggunaan titik-titik lanjutan pada tiap-tiap langkah interval dengan harapan tingkat akurasi meningkat merupakan prinsip utama dari metode Runge-Kutta [10], seperti terlihat pada persamaan umum iteratifnya yang ditulis dalam bentuk:

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n, h) \quad (3)$$

Dimana:

$$f(x_n, y_n, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_m k_m$$

$$h = x_{n+1} - x_n$$

Penjabaran bentuk umum metode Runge-Kutta ke dalam metode Runge-Kutta orde satu sampai dengan orde empat adalah sebagai berikut:

a. Metode Runge-Kutta Orde Satu

$$y_n = y_{n-1} + hf(y_{n-1}, t_{n-1})$$

b. Metode Runge-Kutta Orde Dua

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2\right)$$

c. Metode Runge-Kutta Orde Tiga

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3)$$

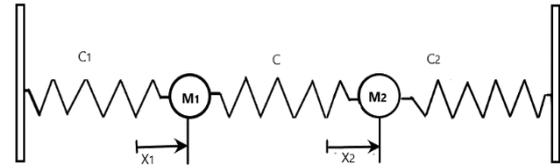
d. Metode Runge-Kutta Orde Empat

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

## METODE

### Analisa Model

Kasus yang akan dicari solusinya merupakan kasus dua buah benda yang terganggu dengan massa masing-masing  $M_1$  dan  $M_2$  dimana terhubung oleh tiga buah pegas dengan besar nilai konstanta masing-masing pada benda pertama adalah  $C_1$ , benda kedua adalah  $C_2$  dan konstanta penghubung dua benda adalah  $C$  dengan massa masing-masing benda diberikan kelajuan awal. Bagaimanakah bentuk perilaku perpindahan dari masing-masing benda dengan variasi nilai konstanta pegas dan massa dari benda 1 maupun benda 2. Ilustrasi dari kasus dapat dilihat pada gambar 1.



Gambar 1. Kasus Getaran Tergandeng

Berdasarkan dua persamaan getaran selaras terganggu pada persamaan (1) dan (2) dan mengacu pada penelitian sebelumnya (Schmid dkk, 1990 dan Arafah, 2001) serta Sulaiman (2008), maka dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = - \left( \frac{C_1+C}{M_1} \right) x_1 + \frac{C}{M_2} x_2 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = - \left( \frac{C_2+C}{M_2} \right) x_2 + \frac{C}{M_1} x_1 \quad (5)$$

Dari persamaan (3) dan (4) dimodifikasi sebagai berikut:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = z_1 \quad (6)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = z_2 \quad (7)$$

Sehingga persamaannya menjadi:

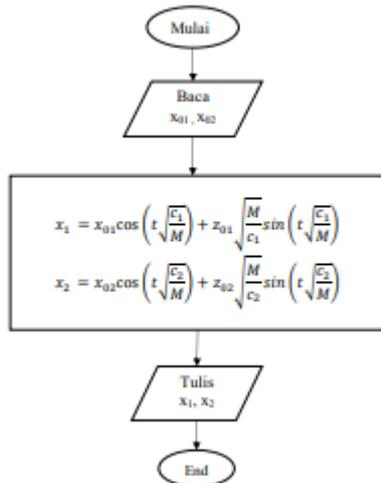
$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = - \left( \frac{C_1+C}{M_1} \right) x_1 + \frac{C}{M_2} x_2 \quad (8)$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial t} = - \left( \frac{C_2+C}{M_2} \right) x_2 + \frac{C}{M_1} x_1 \quad (9)$$

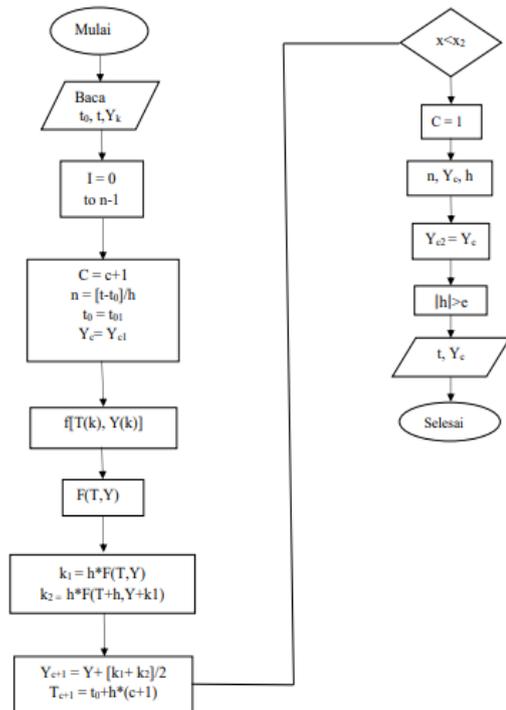
Persamaan (8) dan (9) tersebut yang akan digunakan dalam berbagai metode komputasi.

### Implementasi Metode Komputasi

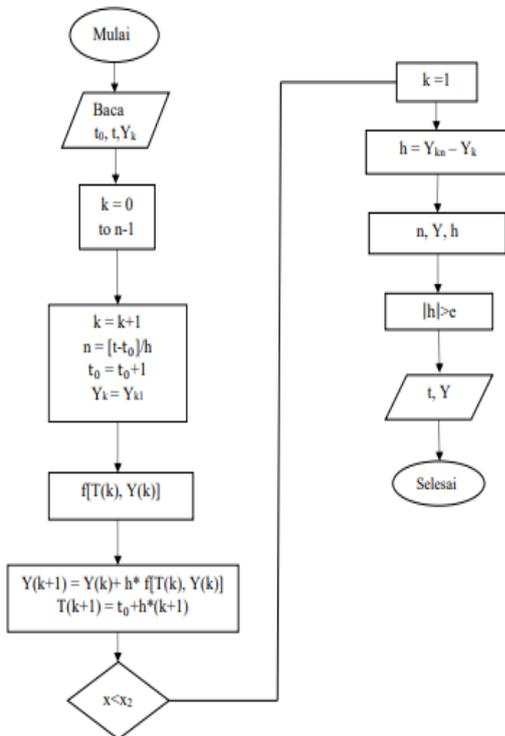
Analisa Komputasi dalam bentuk perancangan *flowchart* (diagram alir) sebagai alur logika dan algoritma sebagai landasan dalam menuliskan *sintaks* program. *Procedure* dalam program sesuai dengan metode-metode yang digunakan untuk analisa komputasi.



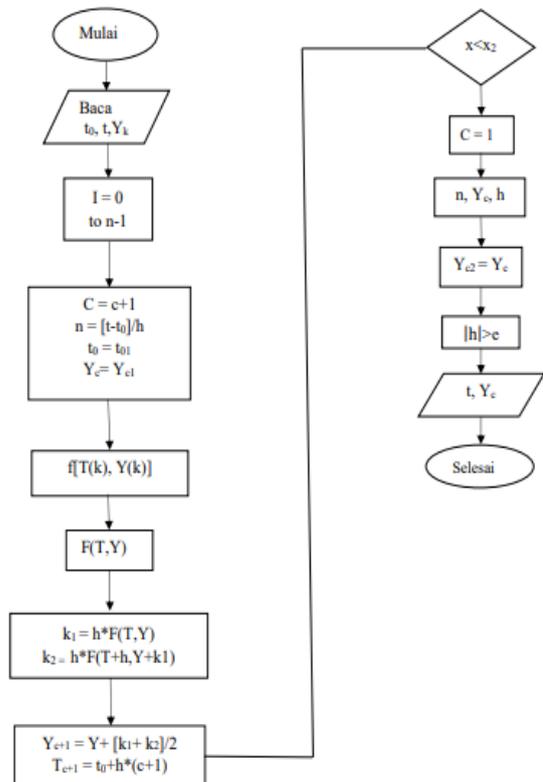
Gambar 2. Diagram Alir Metode Analitik Khusus



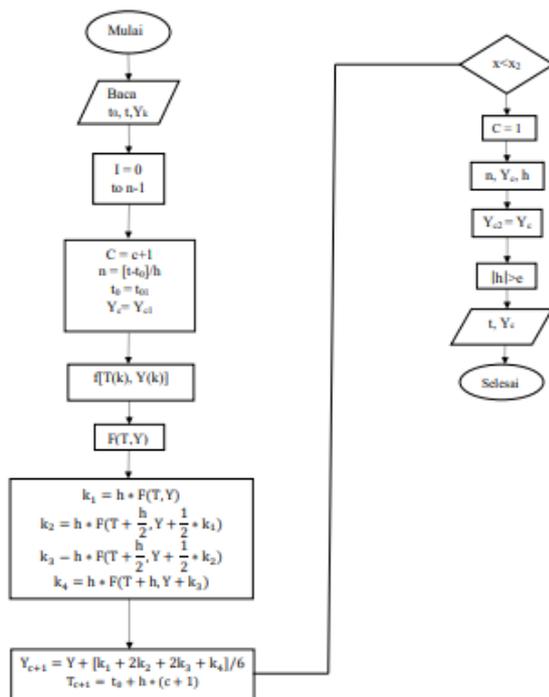
Gambar 4. Diagram Alir Metode Runge Kutta 2



Gambar 3. Diagram Alir Metode Runge Kutta 1



Gambar 5. Diagram Alir Metode Runge Kutta 3



Gambar 6. Diagram Alir Metode Runge Kutta 4

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

**Hasil Perancangan Aplikasi Getaran Tergandeng**

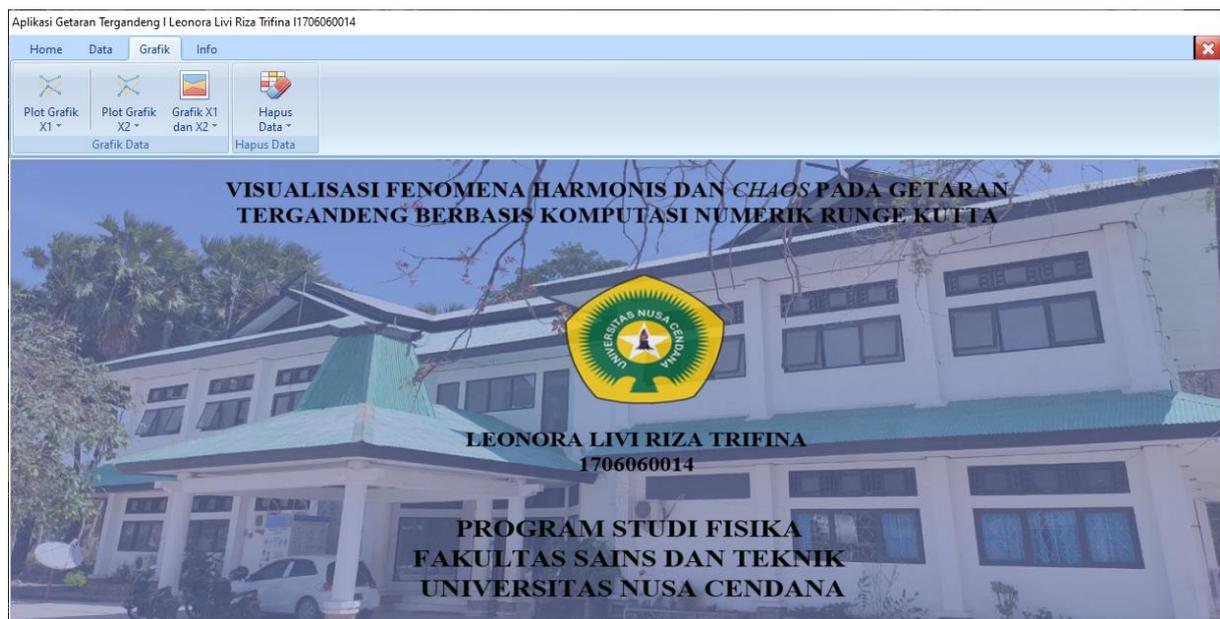
Perancangan aplikasi getaran terdangeng untuk memvisualisasikan fenomena harmonis dan chaos menggunakan pemrograman Delphi XE5 adalah sebagai berikut:

**Tampilan Utama Aplikasi**

Pada tampilan utama aplikasi terdapat beberapa objek dengan fungsinya masing-

masing. Nama dan fungsi objek-objek tersebut adalah sebagai berikut:

1. Tab menu home berfungsi menampilkan menu setting untuk perhitungan fenomena getaran terdangeng yang memuat 5 metode perhitungan. Dimana 5 metode tersebut yaitu Metode Analitik Khusus, Metode Runge Kutta Orde Satu, Metode Runge Kutta Orde Dua, Metode Runge Kutta Orde Tiga, dan Metode Runge Kutta Orde Empat.
2. Tab menu data terdiri dari tombol simpan data untuk menyimpan data yang telah diolah, tombol load data untuk mengambil data dalam database, tombol simpan gambar untuk menyimpan file gambar dalam format bitmap dan tombol tabel data untuk menampilkan data-data hasil perhitungan.
3. Tab menu grafik terdiri dari tombol plot grafik X1 untuk menampilkan grafik perpindahan pendulum 1, tombol plot grafik X2 untuk menampilkan grafik perpindahan pendulum 2, tombol plot grafik X1 dan grafik X2 untuk menampilkan sekaligus grafik X1 dan X2 dari lima metode dalam satu grafik dan tombol hapus data untuk menghapus data pada stringgrid dan grafik hasil ploting.
4. Tab menu info terdiri dari tombol profil untuk menampilkan profil tentang pembuat aplikasi, tombol about untuk menampilkan informasi umum terkait aplikasi dan tombol help untuk menampilkan cara penggunaan aplikasi.



Gambar 7. Tampilan Utama Aplikasi

### Hasil Pengujian Solusi Analitik

Pengujian validasi program dilakukan dengan menerapkan getaran terdangeng sederhana yang memiliki solusi secara analitik, dengan memberikan nilai massa pendulum pertama dan pendulum kedua  $M_1=M_2= 3 \text{ kg}$ , konstanta pegas  $C= 0 \text{ N/m}$ , kelajuan massa pertama dan kedua  $Z_{01} = 0 \text{ m/s}$ ,  $Z_{02} = 50 \text{ m/s}$ , gaya yang bekerja pada massa pertama dan kedua  $C_1 = 30 \text{ N/m}$ ,  $C_2 = 40 \text{ N/m}$ , dengan waktu awal  $t_0 = 0 \text{ sekon}$  dan waktu akhir  $t = 2 \text{ sekon}$ , simpangan massa pertama dan kedua  $x_{01} = 3 \text{ meter}$ ,  $x_{02} = 5 \text{ meter}$ . Dari hasil perhitungan metode komputasi untuk metode analitik keadaan khusus dengan  $C = 0$  dengan variasi lebar langkah  $h = 0,1, h = 0,01$  dan  $h = 0,001$  maka diperoleh bahwa metode Runge Kutta orde satu sampai empat baru memberikan hasil yang mendekati nilai analitik ketika nilai lebar langkah diperkecil pada nilai  $h = 0,001$ , hal ini dipahami karena pada metode Runge Kutta tingkat akurasi meningkat oleh penggunaan

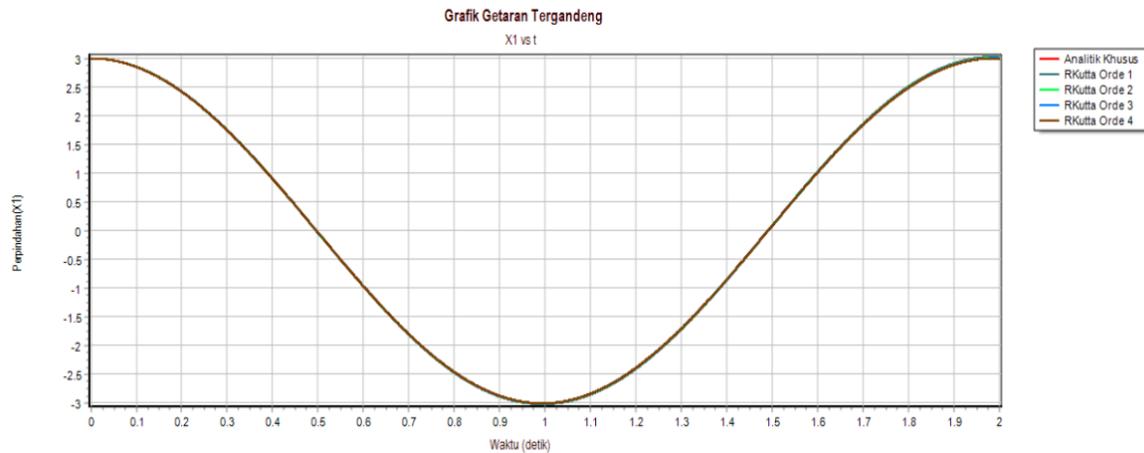
titik-titik lanjutan pada tiap langkah-langkah interval dan untuk mencapai akurasi yang tinggi diperlukan nilai lebar langkah ( $h$ ) yang sangat kecil.

Analisa analitik yang dilakukan agar dapat diketahui apakah hasil dari solusi yang digunakan memiliki nilai presisi dan akurasi yang baik atau tidak diperlukan sebuah nilai standar yang dapat dipakai sebagai hasil perbandingan atau dapat dipercayai sebagai sebuah nilai kebenaran. Data pada tabel 1 merupakan data hasil perhitungan perpindahan benda 1 terhadap waktu ( $X_1$ ) dari kelima metode yang digunakan. Hal ini dilakukan untuk melihat perbandingan nilai perhitungan secara analitik dan komputasi numerik. Dari hasil tersebut terlihat bahwa metode Runge Kutta orde 4 menghasilkan nilai perhitungan yang sama dengan nilai yang diperoleh oleh metode Analitik Khusus dengan nilai eror yang sangat kecil yakni  $1 \times 10^{-11}$ .

Tabel 1. Hasil perhitungan X1 Sistem Getaran Tergandeng untuk  $M_1=M_2= 3 \text{ kg}, C_1 = 30 \text{ N/m}, C_2 = 40 \text{ N/m}, C= 0 \text{ N/m}, h = 0,001, Z_{01} = 0 \text{ m/s}$

No	Waktu (t)	Analitik Khusus	Runge Kutta 1	Runge Kutta 2	Runge Kutta 3	Runge Kutta 4
1	0.001	2.9999850000125	3	2.999985	2.999985	2.9999850000125
2	0.002	2.9999400002	2.99997	2.999940000075	2.9999400001125	2.9999400002
3	0.003	2.9998650010125	2.99991	2.9998650006	2.9998650007625	2.9998650010125
4	0.004	2.99976000319998	2.9998200003	2.99976000225	2.99976000267499	2.99976000319998
5	0.005	2.99962500781243	2.9997000015	2.99962500599997	2.99962500687496	2.99962500781244

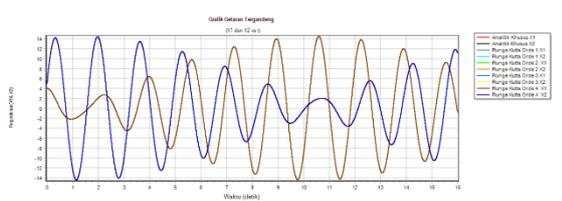
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
1996	1.996	2.99876274969111	3.02884191790856	3.00621970604493	3.00124608419201	2.99876274969152
1997	1.997	2.99847532339684	3.02856695399962	3.00593154109262	3.00095838159218	2.99847532339730
1998	1.998	2.99815791237432	3.02826170167151	3.00561331606690	3.00064066914376	2.99815791237483
1999	1.999	2.99781051979766	3.02792616367385	3.00526503407489	3.00029294999889	2.99781051979822
2000	2	2.99743314914079	3.02756034305918	3.00488669852426	2.99991522760974	2.9974331491414
<b>Galat(%)</b>			<b>5.029945707121E-03</b>	<b>2.951357802047E-03</b>	<b>9.908989611342E-04</b>	<b>1E-11</b>



Gambar 8. Grafik Pendulum dengan ( $M_1=M_2= 3 \text{ kg}, C_1 = 30 \text{ N/m}, C_2 = 40 \text{ N/m}, C= 0 \text{ N/m}, h = 0,001, Z_{01} = 0 \text{ m/s}$ )

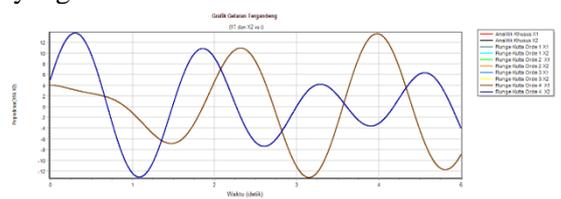
### Analisa Solusi Perpindahan Benda terhadap Waktu pada Sistem Getaran Tergandeng

Penggambaran fenomena getaran terganggu dengan variasi beberapa variabel dalam sistem yang ditinjau melalui serangkaian proses komputasi untuk penginterpretasian dan analisis dalam beberapa keadaan yakni kopling lemah, kopling sedang dan kopling kuat, digunakan metode Runge- Kutta 4. Parameter konstanta pegas ( $C_1, C_2$ , dan  $C$ ) menjadi parameter utama dalam meninjau perpindahan benda pada beberapa keadaan tersebut. Diperoleh dari variasi beberapa variabel nilai konstanta pegas memberikan pengaruh signifikan pada setiap gerak pendulum.



Gambar 9. Grafik Pendulum dengan Kopling Lemah ( $M_1=M_2= 3 \text{ kg}, C_1 = C_2 = 40 \text{ N/m}, C= 4 \text{ N/m}$ )

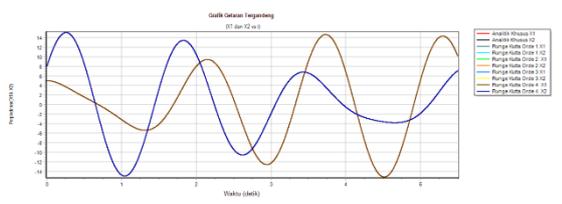
Pada pendulum dengan kopling lemah ( $C_1 = C_2 = 40 \text{ N/m}, C= 4 \text{ N/m}$ ) nilai konstanta pegas yang kecil memberikan pengaruh pada setiap gerak pendulum seperti terlihat pada gambar 9, dimana setiap pendulum memiliki kesempatan yang lebih besar untuk terus berosilasi secara bergantian, keadaan ini dikarenakan ikatan antara kedua pendulum yang elastis.



Gambar 10. Grafik Pendulum dengan Kopling Sedang I ( $M_1=M_2= 3 \text{ kg}, C_1 = 30, C_2 = 40 \text{ N/m}, C= 10 \text{ N/m}$ )

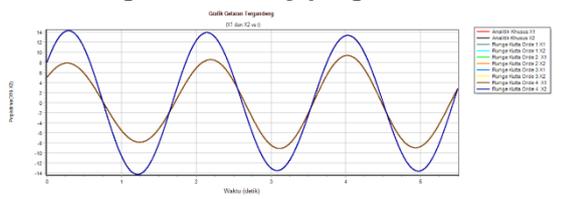
Untuk keadaan kopling sedang 1 dengan nilai antara keduanya tidak begitu besar yaitu  $C_1 = 30, C_2 = 40 \text{ N/m}$  dengan  $C= 10 \text{ N/m}$  diperoleh gambar 10 yang menggambarkan bahwa dalam sistem tidak ada gaya dominan pada masing-masing pendulum sehingga terlihat keduanya bergerak secara sembarang

satu sama lain sekalipun belum dikategorikan sebagai gerak yang harmonis.



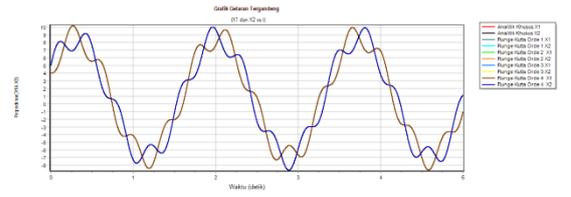
Gambar 11. Grafik Pendulum dengan Kopling Sedang II ( $M_1=M_2= 3 \text{ kg}, C_1 = C_2 = 40 \text{ N/m}, C= 10 \text{ N/m}$ )

Tinjauan lebih lanjut dengan menetapkan nilai tetapan gaya yang sama pada masing-masing pendulum yakni  $C_1 = C_2 = 40 \text{ N/m}$  dan  $C= 10 \text{ N/m}$  tetap serta simpangan awal masing-masing pendulum berbeda dari keadaan sebelumnya diatur menjadi 5 m pada pendulum pertama dan 8 m untuk pendulum kedua serta waktu osilasi ( $t= 5,5 \text{ sekon}$ ). Gambaran sistem yang diperoleh dari keadaan ini seperti terlihat pada gambar 11 menunjukkan getaran yang dihasilkan masih dalam keadaan acak dimana masing-masing pendulum bergerak secara sembarang satu terhadap yang lain.



Gambar 12. Grafik Pendulum dengan Kopling Sedang III ( $M_1=M_2= 3 \text{ kg}, C_1 = 40, C_2 = 30 \text{ N/m}, C= 10 \text{ N/m}$ )

Kondisi lain diperoleh dengan mengubah nilai kelajuan awal pada benda 1 yaitu 20 m/s dan nilai tetapan gaya pada masing-masing pendulum  $C_1 = 40, C_2 = 30 \text{ N/m}$  dan  $C= 10 \text{ N/m}$  serta simpangan awal dan waktu osilasi dari masing-masing memiliki nilai yang sama dengan nilai pendulum di kopling sedang II. Dengan kondisi ini diperoleh grafik yang menunjukkan getaran harmonis pada sistem seperti terlihat pada gambar 12. Keadaan ini disebut "*eigen-oscillation*" yang merupakan koordinat normal sistem dengan gerak yang menunjukkan perpindahan pendulum yang simetris dan tidak saling mendominasi



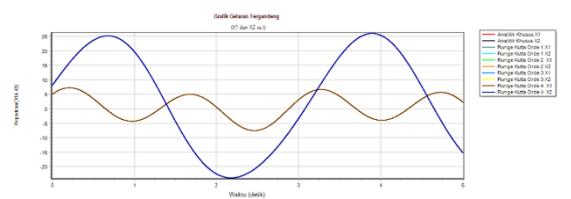
Gambar 13. Grafik Pendulum dengan Kopling Kuat ( $M_1=M_2= 3 \text{ kg}, C_1 = C_2 = 40 \text{ N/m}, C= 400 \text{ N/m}$ )

Pada tinjauan pendulum dengan kopling kuat dengan ( $C_1 = C_2 = 40 \text{ N/m}, C=10C_1$ ) memberikan pengaruh pada kedua pendulum sehingga tidak bisa bergerak secara bebas yang diperlihatkan oleh gambar 5.10. Hal ini menunjukkan kekakuan dari sistem yang dikarenakan penghubung diantara keduanya bersifat tidak elastis dan mengharuskan keduanya berosilasi bersama-sama dan masing-masing tidak bisa bergerak bebas serta perlahan memperlihatkan keadaan sistem yang *chaos*.

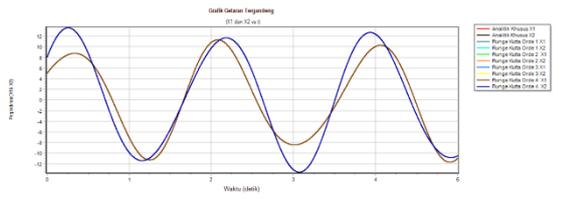
### Analisis Keadaan Harmonis dan *Chaos* pada Sistem Getaran Tergandeng

Pada sistem getaran terdangeng identik dengan fenomena harmonis dan *chaos*, dimana dari hasil yang diperoleh berdasarkan kajian pada sistem dengan tinjauan beberapa parameter seperti nilai massa benda ( $M_1$  dan  $M_2$ ), dan konstanta pegas diperoleh bahwa keadaan harmonis pada sistem ditandai dengan grafik yang teratur dan pola keterkaitan antara dinamika pada perpindahan  $x_1$  dan  $x_2$  terhadap waktu cukup stabil sementara untuk keadaan *chaos* terlihat dengan jelas pola yang tidak beraturan pada perpindahan  $x_1$  dan  $x_2$  dengan gerakan sistem yang terlihat acak sehingga sulit untuk dapat diprediksi dalam setiap gerakannya seiring dengan bertambahnya nilai massa dan konstanta pegas. Beberapa keadaan tersebut diwakilkan oleh beberapa gambar hasil visualisasi berikut:

### Keadaan Harmonis

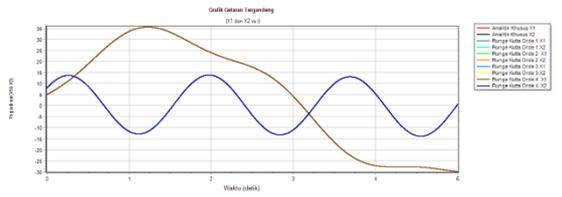


Gambar 14. Grafik Pendulum dengan massa pendulum kedua ( $M_2= 10 \text{ kg}$ )

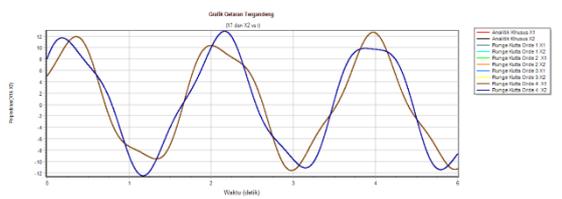


Gambar 15. Grafik Pendulum dengan konstanta pegas ( $C= 25 \text{ N/m}$ )

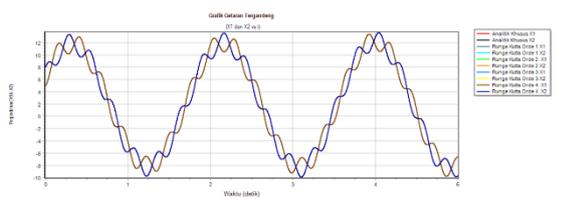
**Keadaan Chaos**



Gambar 16. Grafik Pendulum dengan massa pendulum pertama ( $M_1= 50 \text{ kg}$ )



Gambar 17. Grafik Pendulum dengan konstanta pegas ( $C= 100 \text{ N/m}$ )



Gambar 18. Grafik Pendulum dengan konstanta pegas ( $C= 800 \text{ N/m}$ )

**Analisis Fisis Fenomena Harmonis dan Chaos pada Sistem Getaran Tergandeng**

Kajian terhadap sistem getaran terganggu dalam menganalisis fenomena harmonis dan *chaos*, dimana dua kondisi tersebut menggambarkan karakteristik dari sistem dilakukan dengan mengubah nilai dari beberapa parameter untuk menggambarkan secara nyata perilaku dari sistem. Parameter-parameter tersebut antara lain adalah massa dari masing-masing pendulum, kelajuan awal benda dan konstanta pegas.

Beberapa grafik visualisasi yang dihasilkan dari hasil plotting data perhitungan dengan meninjau beberapa keadaan diantaranya sistem dengan kopling lemah, kopling sedang

dan kopling kuat serta variasi parameter massa dan konstanta pegas secara kompleks untuk menganalisis perilaku sistem getaran terganggu yakni fenomena harmonis dan *chaos* secara kualitatif dan kuantitatif. Analisis aspek kualitatif dan kuantitatif diperkuat oleh perbandingan plot perpindahan terhadap waktu dari masing-masing pendulum yang menunjukkan sensitivitas sistem terhadap keadaan awal.

Kondisi harmonis untuk sistem getaran terganggu diperoleh saat grafik perpindahan memperlihatkan masing-masing gerak pendulum yang selalu konstan dengan posisi perpindahan pendulum terhadap waktu berupa grafik sinusoidal sementara kondisi *chaos* diperoleh saat gerak dari masing-masing pendulum sudah tidak beraturan atau mengalami fluktuasi yang mana terdapat lonjakan-lonjakan dan penurunan-penurunan dari grafik perpindahan pendulum terhadap waktu dengan pola yang tidak beraturan atau dengan kata lain gerakan masing-masing pendulum dalam sistem tidak pernah berulang dan terus menerus melakukan gerakan yang berbeda dalam setiap waktu.

Untuk melihat keakuratan dari solusi numerik dimanfaatkan galat atau nilai eror relatif yang mana galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya dengan semakin kecil galatnya, semakin teliti solusi numerik yang didapatkan. Dari hasil yang telah diperoleh pada penggunaan 3 variasi nilai lebar langkah yang berbeda nilai kesalahan relatif terkecil di peroleh pada lebar langkah  $h=0,001$  pada metode Runge Kutta orde empat sebesar  $1 \times 10^{-11}$  sedangkan pada metode Runge Kutta orde satu sampai tiga nilai rata-rata kesalahan relatif berturut-turut berkisar  $5,029945707121 \times 10^{-3}$ ,  $2,951357802047 \times 10^{-3}$  dan  $9,908989611342 \times 10^{-4}$ . Terlihat bahwa nilai kesalahan relatif pada metode Runge Kutta orde empat jauh lebih kecil dibandingkan nilai kesalahan relatif pada metode Runge Kutta orde satu sampai tiga. Sehingga, didasari hal tersebut bahwa metode Runge Kutta orde empat lebih cepat konvergen dan memiliki nilai kesalahan relatif yang lebih kecil dibandingkan metode Runge Kutta orde satu sampai tiga.

## KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa:

Implementasi metode komputasi numerik Runge Kutta orde satu sampai empat memberikan solusi pendekatan numerik yang mendekati nilai analitik sekaligus persamaan diferensial sistem getaran terdangeng dimana dari penggunaan Metode Runge Kutta orde satu sampai empat, metode Runge Kutta orde empat merupakan metode yang terbaik ketelitiannya dengan nilai rata-rata kesalahan relatif  $1 \times 10^{-11}$  pada lebar langkah  $h=0.001$  dibandingkan dengan Metode Runge Kutta orde satu sampai tiga sehingga diketahui bahwa semakin kecil nilai lebar langkah ( $h$ ) dan semakin tinggi orde dari metode Runge Kutta yang digunakan maka hasil yang diperoleh semakin teliti dan lebih mendekati hasil analitiknya.

Pada sistem fisis getaran terdangeng ini, nilai lebar langkah yang digunakan yakni 0,1; 0,01 dan 0,001 dan nilai perpindahan pendulum terhadap waktu dengan hasil terbaik serta yang mendekati nilai analitik diperoleh pada lebar langkah ( $h$ ) = 0,001.

Interpretasi fenomena getaran terdangeng yang didasarkan pada variasi massa, kelajuan awal benda dan konstanta pegas memberikan gambaran sistem yang bersifat harmonis dan *chaos* yang mana hal ini menyatakan bahwa nilai massa, kelajuan awal benda dan konstanta pegas pada sistem memberikan pengaruh yang sangat signifikan. Ketika nilai massa pendulum dan konstanta pegas diperbesar maka setiap pendulum memiliki frekuensi osilasi yang semakin kecil sehingga gejala *chaos* atau acak pada sistem semakin terlihat seperti pada nilai  $C= 100$  N/m,  $C= 400$  N/m,  $C= 800$  N/m dan keadaan harmonis pada sistem diperoleh pada nilai massa pendulum  $M_1=M_2= 3$  kg, kelajuan awal benda  $Z_{01} = 20$  m/s,  $Z_{02} = 40$  m/s dan nilai konstanta pegas  $C= 10$  N/m serta pada nilai  $C= 0$  N/m.

## SARAN

Berdasarkan hasil penelitian, maka penulis menyampaikan saran, yaitu pada kasus

ini diperoleh grafik fenomena harmonis dan *chaos* dengan tinjauan beberapa variasi sehingga penulis menyarankan untuk melakukan kajian lebih lanjut dengan meninjau beberapa parameter lain yang mempengaruhi sistem sekaligus mengembangkan aplikasi sistem lebih lanjut dengan membuat aplikasi dengan sistem berbasis android.

## DAFTAR PUSTAKA

- 1 Pain, H.J. 2005. *The Physics of Vibrations and Waves 6<sup>th</sup> Edition*. USA : John Wiley & Sons, Inc
- 2 Dewanto, J. 1999. *Klasifikasi Getaran*. Jurnal Teknik Mesin. Vol. 1, No. 2, hal 156-162
- 3 Tunga, BK. 2011. *Dasar-dasar Getaran Mekanis*. Yogyakarta : Penerbit Andi
- 4 Warsito, A. 2009. *Fisika Komputasi*. Modul Bahan Ajar Fisika FST Undana
- 5 Schmid, Erich W, dkk.1990. *Theoretical Physics on Personal Computer 2<sup>th</sup> Edition*.New York: Heidelberg
- 6 Arafah, E. 2002. *Coupled Harmonic Oscillations*. Department of Physics. University of Jordan
- 7 Sulaiman, Halfiana. 2008. *Kajian Fenomena Fisis Getaran Selaras Terdangeng dengan Metode Euler dan Runge-Kutta*. Skripsi Jurusan Fisika-FST : Universitas Nusa Cendana
- 8 Halliday, Jearl. W, dkk. 1998. *Fundamental of Physics 9<sup>th</sup> Edition*. USA : John Wiley & Sons, Inc
- 9 Tipler, P.A. 1991. *Fisika Untuk Sains dan Teknik*. Jakarta : Erlangga
- 10 Chapra, S.C., R.P. Canale. 2014. *Numerical Methods for Engineers 7<sup>th</sup> Edition*. McGraw-Hill Education : New York
- 11 Giancolli, Douglas C. 1997. *Fisika Jilid I Edisi Keempat*. Terjemahan Cuk Imawan, dkk. Jakarta : Erlangga
- 12 Boas, M.L. 1983. *Mathematical Methods in the Physical Sciences 3<sup>rd</sup> Edition*. USA: John Wiley & Sons, Inc
- 13 Beiser, Arthur. 1981. *Konsep Fisika Modern*. Jakarta : Erlangga