Vol. 4, No. 2 – Oktober 2019
ISSN: 2503-5274(p), 2657-1900(e)

ANALISIS KESTABILAN SISTEM DINAMIK PARTIKEL DALAM MEDAN POTENSIAL *HARDCORE DOUBLE YUKAWA*

Herry F. Lalus dan Yusniati H. Muh. Yusuf
Prodi Fisika, FKIP, Universitas Nusa Cendana, Jl. Adisucipto-Penfui, Kupang, 85000, Indonesia
E-mail: herrylalus@staf.undana.ac.id

Abstrak

Paper ini mengkaji sistem dinamik partikel yang bergerak dalam pengaruh medan potensial Hardcore Double Yukawa (HCDY) [1]. Kajian ini difokuskan pada analisis kondisi stabil sistem dinamik dengan memanfaatkan sifat kestabilan linear. Massa partikel dalam sistem ini ditinjau sebagai fungsi koordinat, sehingga berbentuk lebih umum. Potensial HCDY digunakan dalam mengkonstruksi Hamiltonian sistem dan selanjutnya dipakai untuk menentukan matriks Jacobinya. Selanjutnya, nilai eigen matriks menjadi dasar menganalisis kestabilan sistem dinamik ini. Untuk sistem dengan potensial jenis ini, hanya dimungkinkan dua jenis kestabilan, yaitu saddle dan rotor. Syarat-syarat untuk kedua jenis kestabilan ini juga ditampilkan.

Kata kunci*:* *potensial Hard Core Double Yukawa; sistem dinamik; keadaan stabil*

Abstract

This paper discusses the dynamical sistem of particle that move under the influence of the Hard Core Double Yukawa (HCDY) potential field[1]. This study focuses on analyzing the stable condition of the dynamical sistem by utilizing the nature of linear stability. The mass of particle in this system is depend on coordinate function, so its form is more general. The HCDY potential is used in constructing the Hamiltonian system and then used to determine the Jacobian matrix. Futhermore, the matrix eigenvalue is the basis for analyzing the stability of this dyanamical system. For systems with this type of potential, only two types of stability are possible, namely saddle and rotor. The conditions for both types of stability are also displayed.

Keywords*:* *Hard Core Double Yukawa potential; dynamical system; stability*

PENDAHULUAN

Potensial Yukawa adalah potensial yang terdapat dalam model inti atom, yang pertama kali diusulkan pada tahun 1935 oleh seorang ilmuan Jepang bernama Hideki Yukawa untuk menjelaskan model atom James Chadwick, yang menyatakan bahwa inti atom terdiri dari neutron dan proton. Potensial ini merupakan model potensial inti yang bertanggungjawab dalam salah satu interaksi paling mendasar di alam yaitu interaksi kuat (*strong interaction*)[2,3].

Dewasa ini, model potensial Yukawa telah banyak dikaji dalam berbagai bidang fisika seperti Mekanika Kuantum[4,5,6], Termodinamika[7], Gravitasi dan *Dark Energy*[8], dan Mekanika Fluida[9]. Salah satu jenis modifikasi potensial Yukawa yang menarik adalah Potensial HCDY. Potensial ini adalah salah satu modifikasi potensial Yukawa standar, dan bisa didapati pada fenomena fisis seperti model inti, mekanika fluida dan statistik termodinamika [1,9]. Potensial HCDY yang dikaji dalam paper ini adalah bentuk potensial yang terdapat pada persamaaan (4) pada[1], yang memiliki bentuk eksplisit :

$$V(r) = -\frac{1}{r}\left(K_1 e^{-\lambda_1(r-1)} - K_2 e^{-\lambda_2(r-1)}\right) \quad (1)$$

untuk $r \geq 1$; di mana $K_1, K_2, \lambda_1,$ dan λ_2 adalah konstanta positif. Model potensial ini menjadi sangat penting karena bentuknya yang relatif berbeda dan juga belum banyak kajian yang dilakukan tentangnya.

Jika suatu partikel bermassa *m* masuk dalam pengaruh medan potensial ini, maka tentunya partikel tersebut akan mengalami gaya yang diberikan medan potensial ini kepadanya. Bentuk potensial ini sangat berpengaruh terhadap model dinamika dari partikel yang masuk ke dalamnya. Tentunya, ini adalah suatu hal yang sangat menarik untuk dikaji model dinamikanya. Satu hal yang dipastikan juga bahwa dinamika partikel dalam medan ini tentunya berbeda dengan dinamika partikel yang sama ketika masuk dalam medan potensial Yukawa standar.

Jika kita memperhatikan bentuk persamaan (4) pada[1], bentuk potensial ini jelas cukup berbeda dengan model potensial Yukawa standar[2-9]. Dalam potensial inipun, faktor konstanta λ juga ada dua jenis. Ini adalah salah satu letak perbedaan yang cukup mendasar. Potensial ini selanjutnya digunakan untuk mengkonstruksi Hamiltonian sistem yang ditinjau. Hamiltonian ini menjadi dasar untuk menentukan persamaan geraknya dan juga menganalisis keadaan dinamika sistem yang bersangkutan.

Tidak semua persamaan gerak sistem dinamik memiliki solusi eksak analitik, atau jikapun ada, tidak semuanya dapat dengan mudah diperoleh dengan metode-metode yang telah dikembangkan saat ini. Salah satu alasan paling mendasar adalah karena kompleksitas persamaan gerak itu sendiri. Persamaan gerak yang semakin kompleks, biasanya semakin sulit dicari solusi eksak analitiknya. Karena itu, sebagai salah satu alternatif untuk melihat keadaan dinamiknya, dapat digunakan metode pendekatan, atau dapat juga dengan mencari solusinya pada keadaan stabil, yang tentunya bergantung pada syarat-syarat kestabilannya. Syarat-syarat ini dapat diperoleh dari nilai eigen matriks Jacobi yang dibentuk dari linearisasi uraian Taylor di sekitar titik stabil sistem.

Paper ini difokuskan pada analisis kestabilan dari sistem dinamik untuk partikel yang bergerak dalam pengaruh medan potensial HCDY. Keadaan dinamik sistem ini dinyatakan dalam ruang fasa yang memuat koordinat umum q dan momentum p. Massa partikel ditinjau lebih umum, yaitu $m \equiv m(q)$.

SISTEM DINAMIK DAN KEADAAN STABIL

Sistem Dinamik

Keadaan dinamik suatu sistem dapat secara lengkap dinyatakan dalam ruang fasa. Secara matematis [10],

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \qquad (2)$$

di mana x_i memuat berbagai variabel dinamik termasuk koordinat posisi dan momentum, yang dengan jelas bergantung pada waktu t. Sistem yang ditinjau adalah sistem klasik, sehingga berlaku sifat deterministik. Karena itu, jika keadaan awal $u(t_0)$ sistem diketahui, maka kita akan dapat menentukan keadaaan pada waktu $t > t_0$.

Karena u bergantung t maka untuk setiap t, keadaan dinamik dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{d}{dt}u(t) = \dot{u} = f(u(t), t; \gamma) \qquad (3)$$

di mana, f merupakan fungsi umum nonlinear yang memuat koordinat u. Fungsi ini sering juga disebut sebagai medan vektor, dan bergantung waktu. Sedangkan γ merupakan parameter kontrol sistem. Parameter-parameter ini berpengaruh terhadap karakter dinamik sistem.

Secara khusus, untuk suatu sistem dinamik yang dikarakterisasi oleh Hamiltonian sistem, di mana jika terdapat N buah derajat kebebasan dengan koordinat umum $q_1, q_2, \dots, q_N$ dan momentum $p_1, p_2, \dots, p_N$, maka persamaan geraknya dapat dinyatakan oleh[11]

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}; \;\; \dot{p}_i = \{p_i, H\}. \qquad (4)$$

Tanda kurung kurawal pada persamaan (4) merupakan *Poisson brackets*, dengan

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}; \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}\,, \qquad (5)$$

di mana δ_{ij} adalah simbol delta-Kronecker, sehingga

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_j}\{q_i, p_j\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (6)$$

dan

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial q_j}\{p_i, q_j\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \qquad (7)$$

Maka, keadaan dinamiknya dapat dinyatakan dalam ruang fasa

$$u = \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_N \\ q_1 \\ \dots \\ q_N \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Dengan memanfaatkan bentuk pada persamaan (3), (6) dan (7), kemudian mengubahnya ke dalam bentuk matriks, maka evolusi sistem terhadap fungsi waktunya berbentuk

$$\dot{u} = I\left(-\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_N}; \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_N}\right)^T \qquad (9)$$

di mana, I adalah matriks identitas, dan T adalah transpos.

Keadaan Stabil

Jika suatu sistem dalam keadaan setimbang, dengan[10]

$$f(u_0) = 0, \qquad (10)$$

maka $u(t) = u_0 =$ konstan, di mana u_0 merupakan titik kritis. Untuk menganalisis solusi stabil sistem ini, perlu ditinjau trayektori $u(t)$ di sekitar titik kritis u_0. Selanjutnya didefinisikan suatu kuantitas bernilai kecil

$$\epsilon(t) = u(t) - u_0 \qquad (11)$$

yang merupakan jarak trayektori setiap saat terhadap titik kritis. Maka, evolusi setiap ϵ terhadap waktu adalah

$$\frac{d\epsilon_i}{dt} = \dot{\epsilon}_i = \dot{u}_i = f(u_i) \qquad (12)$$

karena $\dot{u_0} = f(u_0) = 0$ untuk semua i. Selanjutnya, persamaan (12) diekspansi di sekitar u_0 diperoleh

$$\dot{\epsilon}_i = f_i(u_0) + \left.\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right|_{u_0} (u_j - u_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}\right|_{u_0} (u_j - u_0)(u_k - u_0) + \cdots \qquad (13)$$

Persamaan (13) dilinearisasi, dan dengan mengingat persamaan (10), maka persamaan (13) menjadi

$$\dot{\epsilon}_i = \left.\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right|_{u_0} (u_j - u_0). \qquad (14)$$

Untuk sistem dinamik dengan $u_j = (p, q)$, maka $u_{0j} = (p_{0j}, q_{0j})$. Maka pernyataan lengkap $\dot{\epsilon}$ adalah

$$\dot{\epsilon} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial p}\right|_{u_0} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial q}\right|_{u_0} \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial p}\right|_{u_0} & \left.\frac{\partial f_2}{\partial q}\right|_{u_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p - p_0 \\ q - q_0 \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Terlihat bahwa $\dot{\epsilon} = M\epsilon$, di mana M adalah matriks 2 x 2 pada persamaan (15), yang disebut juga matriks *Jacobi*. Keadaan stabil untuk sistem ini dapat didilihat dari nilai eigen matriks *M*. Karena matriks Jacobi ini berorde 2 x 2, maka hanya akan terdapat maksimal dua buah nilai eigen. Jika dimisalkan bahwa kedua nilai eigen tersebut adalah μ_1 dan μ_2, maka terdapat beberapa jenis kemungkinan jenis kestabilan. Pertama, jika μ_1 dan μ_2 bernilai riil dan keduanya negatif, maka jenis kestabilannya adalah *stable node*. Kedua, jenis *unstable node*, jika μ_1 dan μ_2 bernilai riil dan keduanya positif. Ketiga, jenis *saddle*, jika μ_1 dan μ_2 bernilai riil dan berbeda tanda. Keempat, jenis *stable spiral*, jika $\mu_1 = \mu_2^*$, bagian riil bernilai negatif. Kelima, jenis *unstable spiral*, jika $\mu_1 = \mu_2^*$, bagian riil bernilai positif. Keenam, jenis *rotor*, jika $\mu_1 = \mu_2^*$, dan murni imajiner [10].

SISTEM DINAMIK DALAM MEDAN POTENSIAL *HCDY*

Berdasarkan persamaan (1), maka Hamiltonian sistem dapat ditulis

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{r}\left(K_1 e^{-\lambda_1(r-1)} - K_2 e^{-\lambda_2(r-1)}\right). \qquad (16)$$

Dari Hamiltonian ini dapat diketahui bahwa matriks Jacobinya berbentuk

$$M = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial p}\right|_{u_0} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial r}\right|_{u_0} \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial p}\right|_{u_0} & \left.\frac{\partial f_2}{\partial r}\right|_{u_0} \end{pmatrix}, \qquad (17)$$

di mana

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} = \frac{p}{m^2}\frac{\partial m}{\partial r}, \tag{18}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial p} = \frac{1}{m}, \tag{19}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial r} = -\frac{p}{m^2}\frac{\partial m}{\partial r}, \tag{20}$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = \frac{p^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 m}{\partial r^2} - \frac{1}{m}\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)^2\right) + \frac{K_1}{r^3}(1 + 2\lambda_1 r + \lambda_1^2 r^2)e^{-\lambda_1(r-1)} - \frac{K_2}{r^3}(1 + 2\lambda_2 r + \lambda_2^2 r^2)e^{-\lambda_2(r-1)}. \tag{21}$$

Kemudian, mencari nilai eigen matriks

$$\det(M - \mu I) = \left|\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial p} - \mu & \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} & \frac{\partial f_2}{\partial r} - \mu \end{matrix}\right|_{u_0} = 0, \tag{22}$$

maka diperoleh

$$\mu^2 - 2\eta\mu + \beta = 0, \tag{23}$$

dengan solusi

$$\mu_{1,2} = \eta \pm \sqrt{\eta^2 - \beta}, \tag{24}$$

di mana

$$\eta = \frac{1}{2}Tr(M) \tag{25}$$

dan

$$\beta = \frac{\partial f_1}{\partial p}\frac{\partial f_2}{\partial r} - \frac{\partial f_1}{\partial r}\frac{\partial f_2}{\partial p} = \frac{p^2}{2m^4}(m-2)\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)^2 - \frac{p^2}{2m^2}\frac{\partial^2 m}{\partial r^2} - \frac{K_1}{mr^3}(1 + 2\lambda_1 r + \lambda_1^2 r^2)e^{-\lambda_1(r-1)} + \frac{K_2}{mr^3}(1 + 2\lambda_2 r + \lambda_2^2 r^2)e^{-\lambda_2(r-1)}. \tag{26}$$

Persamaan (26) menunjukkan bahwa massa benda harus bernilai lebih besar dari pada nol. Artinya, tidak diperbolehkan bagi partikel seperti foton, partikel hipotesis graviton, atau partikel apapun yang bermassa diam nol. Untuk partikel jenis ini, tidak berlaku analisis ini.

Karena $\eta = 0$, maka

$$\mu_{1,2} = \pm\sqrt{-\beta}. \tag{27}$$

Berdasarkan persamaan (27), kita hanya memiliki dua kemungkinan jenis kestabilan, yaitu *saddle* dan *rotor*. Jenis *saddle* terjadi jika $\beta < 0$, sedangkan jenis *rotor* terjadi jika $\beta > 0$. Kajian untuk kedua jenis keadaan stabil ini dibagi ke dalam dua buah domain, yaitu untuk $r = 1$ dan $r > 1$. Untuk $r = 1$,

$$\beta = \left[\frac{p^2}{2m^4}(m-2)\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)^2 - \frac{p^2}{2m^2}\frac{\partial^2 m}{\partial r^2} - \frac{K_1}{m}(\lambda_1 + 1)^2 + \frac{K_2}{m}(\lambda_2 + 1)^2\right]\Bigg|_{r=1}, \tag{28}$$

dan untuk $r > 1$,

$$\beta = \left[\frac{p^2}{2m^4}(m-2)\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)^2 - \frac{p^2}{2m^2}\frac{\partial^2 m}{\partial r^2} - \frac{K_1}{mr^3}(1 + 2\lambda_1 r + \lambda_1^2 r^2)e^{-\lambda_1(r-1)} + \frac{K_2}{mr^3}(1 + 2\lambda_2 r + \lambda_2^2 r^2)e^{-\lambda_2(r-1)}\right]\Bigg|_{r>1}. \tag{29}$$

Pertama, kita menganalisis beberapa persyaratan untuk jenis *saddle*. Karena secara fisis, $K_1, K_2, \lambda_1, \lambda_2$ harus bernilai positif, maka terdapat beberapa contoh kemungkinan syarat keadaan ini pada $r = 1$, yaitu

1. Jika $\lambda_1 > \lambda_2$; $K_1 \geq K_2$; $\left.\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right|_{r=1} > 0$; $0 < m(r=1) \leq 2$.
2. Jika $K_1\lambda_1 \geq K_2\lambda_2$; $\left.\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right|_{r=1} > 0$; $0 < m(r=1) \leq 2$.

Jurnal Fisika
Fisika Sains dan Aplikasinya

3. Jika $K_1 = K_2$; $\lambda_1 = \lambda_2$; $\left.\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right|_{r=1} > \left.\frac{1}{m}(1-\frac{2}{m})\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)^2\right|_{r=1}$; $m(r=1) > 0$. Untuk $0 < m(r=1) < 2$, suku $\left.\frac{p^2}{2m^4}(m-2)\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)^2\right|_{r=1}$ bernilai negatif, sehingga nilai β bernilai negatif jika $\left.\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right|_{r=1} > 0$. Untuk $m(r=1) = 2$, nilai β murni hanya suku $-\left.\frac{p^2}{2m^2}\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right|_{r=1}$, sehingga agar β bernilai negatif, maka $\left.\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right|_{r=1} > 0$. Sedangkan, untuk $m > 2$, suku $\left.\frac{p^2}{2m^4}(m-2)\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)^2\right|_{r=1}$ bernilai positif, sehingga agar β negatif, maka $\left|\left.\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right|_{r=1}\right| > \left|\left.\frac{1}{m}(1-\frac{2}{m})\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)^2\right|_{r=1}\right|$.

Masih terdapat cukup banyak syarat yang dapat diperoleh berdasarkan persamaaan (28).

Untuk $r > 1$, keadaan *saddle* memiliki beberapa contoh kemungkinan syarat kestabilan, yaitu

1. Jika $\lambda_1 < \lambda_2$; $K_1 \geq K_2$; $\left.\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right|_{r>1} > 0$; $0 < m(r>1) \leq 2$.
2. Jika $K_1 = K_2$; $\lambda_1 = \lambda_2$; $\left.\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right|_{r>1} > \left.\frac{1}{m}(1-\frac{2}{m})\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)^2\right|_{r>1}$; $m(r>1) > 0$. Untuk $0 < m(r>1) < 2$, suku $\left.\frac{p^2}{2m^4}(m-2)\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)^2\right|_{r>1}$ bernilai negatif, sehingga nilai β bernilai negatif jika $\left.\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right|_{r>1} > 0$. Untuk $m(r>1) = 2$, nilai β murni hanya suku $-\left.\frac{p^2}{2m^2}\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right|_{r>1}$, sehingga agar β bernilai negatif, maka $\left.\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right|_{r>1} > 0$. Sedangkan, untuk $m > 2$, suku $\left.\frac{p^2}{2m^4}(m-2)\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)^2\right|_{r>1}$ bernilai positif, sehingga agar β negatif, maka $\left|\left.\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right|_{r>1}\right| > \left|\left.\frac{1}{m}(1-\frac{2}{m})\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)^2\right|_{r>1}\right|$.

Sama dengan pada $r = 1$, untuk domain ini masih terdapat banyak kemungkinan syarat kestabilannya yang dapat dengan mudah ditentukan berdasarkan persamaan (29).

Dapat dilihat bahwa, untuk syarat kestabilan pada $r = 1$ dan $r > 1$ terutama pada syarat pertama dari masing-masing titik atau daerah evaluasi syarat yang sama untuk m dan $\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}$, perbedaannya cukup mendasar, yaitu pada syarat hubungan nilai magnitudo λ_1 dan λ_2. Pada $r = 1$ mengharuskan $\lambda_1 > \lambda_2$, sedangkan untuk $r > 1$, mengharuskan yang sebaliknya, yaitu $\lambda_1 < \lambda_2$. Hal ini karena keberadaan eksponensial pada β membuat suku yang memuatnya lebih cepat menuju nol pada r yang semakin besar, sehingga membuat faktor $1 + 2\lambda_{1,2}r + \lambda_{1,2}^2 r^2$ tidak menjadi dominan pada penentuan syarat kestabilannya.

Syarat ketiga pada $r = 1$ memiliki bentuk yang sama dengan syarat kedua pada $r > 1$, karena ketika $K_1 = K_2$; $\lambda_1 = \lambda_2$; β memiliki bentuk yang sama untuk kedua domain ini. Karena itu, untuk pemilihan keadaan ini, kelakuan partikel dalam medan potensial untuk $r = 1$ sama dengan $r > 1$ atau dapat disingkat, untuk syarat jenis ini, domainnya menjadi $r \geq 1$.

Keadaan *saddle* adalah keadaan yang memiliki tafsiran fisis yang *well known* sehingga lebih difokuskan pada paper ini. Ketika partikel bermassa *m(r)* tertentu masuk dalam pengaruh medan potensial, maka perilaku partikel dalam medan akan bergantung pada bentuk potensial tersebut. Berdasarkan semua hasil eksperimen, lintasan partikel dalam medan ini bersesuaian dengan bentuk *saddle*. Karena itu, telah ditampilkan beberapa syarat untuk β yang diperlukan.

Secara fisis, sistem ini memungkinan untuk partikel yang meluruh, sehingga $\partial m/\partial r$ bernilai negatif, namun karena suku ini dikuadratkan, maka hasilnya selalu bernilai positif. Sedangkan untuk $\partial m/\partial r$ bernilai positif, yang secara fisis dapat ditafsir sebagai reaksi dengan partikel lain sehingga terjadi penambahan massa partikel, untuk kajian ini cukup dibatasi karena tentunya akan melibatkan interaksi dengan potensial lain, yang tidak dibahas dalam paper ini. Untuk partikel bermassa konstan (tidak meluruh) semua suku yang memuat $\partial m/\partial r = 0$, sehingga β bernilai $\frac{K_2}{m}(\lambda_2^2 + 2\lambda_2 + 1) -$

$\frac{K_1}{m}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1 + 1)$, yang berarti bahwa keadaan *saddle* untuk partikel jenis ini memenuhi syarat $\lambda_1 > \lambda_2$; $K_1 \geq K_2$ dan $m > 0$. Perlu diingat bahwa, besar defleksi partikel dari arah datang sangat bergantung juga pada paramater impaknya, namun untuk hal ini tidak dibahas di sini.

Keadaan *saddle* lebih dominan dibahas karena lebih banyak fakta eksperimen menunjukkan dinamika untuk keadaan ini. Namun bukan berarti bahwa tidak akan dibahas keadaan rotor. Keadaan ini juga dibahas dengan berbagai batasan tertentu karena secara fisis, sulit ditafsir.

Kedua, kita meninjau kestabilan jenis *rotor*. Syarat untuk keadaan ini adalah kebalikan dari syarat untuk *saddle*, yaitu kita harus mencari syarat untuk menghasilkan $\beta > 0$. Karena itu, tanpa memperpanjang pembahasan, beberapa contoh syarat untuk keadaan ini juga dapat dibagi dalam dua bagian yaitu, untuk $r = 1$ dan untuk $r > 1$. Untuk $r = 1$,

1. Jika $\lambda_1 < \lambda_2$; $K_1 \leq K_2$; $\left.\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right|_{r=1} < 0$; $m(r = 1) \geq 2$.
2. Jika $K_1\lambda_1 \leq K_2\lambda_2$; $\left.\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right|_{r=1} < 0$;$m(r = 1) \geq 2$.
3. Jika $K_1 = K_2$; $\lambda_1 = \lambda_2$; $\left.\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right|_{r=1} < 0$; $m(r = 1) \geq 2$.

Untuk $r > 1$,

1. Jika $\lambda_1 > \lambda_2$; $K_1 \leq K_2$; $\left.\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right|_{r>1} < 0$; $m(r > 1) \geq 2$.
2. Jika $K_1 = K_2$; $\lambda_1 = \lambda_2$; $\left.\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right|_{r>1} < 0$; $m(r > 1) \geq 2$.

Kita masih dapat memilih berbagai syarat lain untuk kestabilan jenis ini, baik untuk $r = 1$ maupun untuk $r > 1$. Tentunya tidak hanya terbatas pada $m(r \geq 1) \geq 2$, namun dapat juga untuk $0 < m(r \geq 1) < 2$.

Kestabilan *rotor* secara sepintas terlihat sepertinya dapat mengarahkan kita untuk melihat kemungkinan lintasan jenis lain partikel dari kebanyakan fakta eksperimen. Namun, dalam skala maksroskopik, kestabilan jenis ini bisa diperoleh pada fenomena planet-planet mengelilingi matahari. Tetapi harus diingat bahwa, pada fenomena tersebut, potensialnya berbeda dengan potensial jenis ini. Hal ini juga dapat diperoleh pada model atom Sommferfeld, namun sekali lagi, bentuk potensialnya berbeda dengan potensial ini. Dengan alasan ini, kami menduga bahwa jika syarat kestabilan di atas dipenuhi, maka kemungkinan akan menghasilkan partikel yang memiliki kestabilan ini, walaupun sekali lagi, ini cukup berbeda dengan fenomena fisis hasil eksperimen. Kami berharap, akan ada bukti eksperimen yang mendukung dugaan kami ini. Hasil ini sangat mungkin dibuktikan secara eksperimen, namun tentunya dengan melihat syarat-syarat yang lebih lengkap secara fisis yang harus dipilih, termasuk faktor massa diam partikel tersebut dan interaksinya terhadap medan lain seperti interaksi antar muatan Coulomb atau antar muatan warnanya, ataupun faktor fisis lainnya.

SIMPULAN

Berdasarkan kajian yang dilakukan terhadap potensial *HCDY*, diperoleh bahwa partikel yang masuk dalam medan potensial ini hanya memiliki dua kemungkinan kestabilan yaitu kestabilan *saddle* dan *rotor*. Analisis syarat keadaan stabil untuk kedua jenis kestabilan ini juga telah dilakukan untuk masing-masing domain keberlakuannya. Telah juga dilakukan analisis dan tafsiran fisis yang bersesuaian dengan kedua jenis kestabilan ini.

DAFTAR PUSTAKA

1 Mehrdad, K. , G. A. Parsafar, R. Hashim. 2010. An Analytical direct corelation function for hard core double Yukawa Potential. *Journal of Non-Crystalline Solids*.doi:10.1016/j.jnoncrysol.2010.08.024.

2 Don, Lincoln. 2004. *Understanding the Universe: From Quarks to the Cosmos*. Singapore: World Scientific. pp. 75–78. ISBN 978-9812387035.

3 Laurie, M. Brown. 1986. "Hideki Yukawa and the Meson Theory". *Physics Today*. 39(12):55–62. doi : 10.1063/1.881048.

4 Abdelmadjid, Maireche. 2017. Investigation on the Relativistic Interactions in One-Electron Atoms with Modified Yukawa Potential for Spin ½ Particles. *International Frontier Science Letters.* Vol. 11.

5 O.J. Oluwadare, K.E. Thylwe, and K.J. Oyewumi. 2016. Non-Relativistic Phase Shift for Scattering on Generalized Radial Yukawa Potentials. *Commun. Theor. Phys.* Vol 65, No. 4.

6 M. R. Shojaei and N. R. Bakht. 2016. Calculation of Energy Spectrum of 12C Isotope with Modified Yukawa Potential by Cluster Models. *Pramana – J. Phys*. 87:54. DOI 10 1007/s12043-016-1261-3.

7 U. S. Okorie, E.E. Ibekwe, A. N. Ikot, M.C. Onyeaju, and E. O. Chukwuocha. 2018. Thermodynamics Properties of the Modified Yukawa Potential. *Journal of the Korean Physical Society*. Vol. 73. Issue 9, pp. 1211-1218.

8 Z. Berezhiani, F. Nesti, L. Pilo, and N. Rossi. 2010. Gravity Modification with Yukawa-type Potential : Dark Matter and Mirror Gravity. *arXiv:0902.0144v2 [hep-th] 13 Dec 2010*.

9 R. Garcia and D. Gonzalez. 2006. Performance of the Double Yukawa Potential in the Variational Theory of Simple Liquids. *Journal Physics and Chemistry of Liquids*. Vol. 18. Issue 2.

10 W. Greiner. 2003. *Classical Mechanics : Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*. New York : Springer.

11 A. Das. 1989. *Integrable Models*. Singapore : World Scientific Publishing.