

KAJIAN KOMPUTASI NUMERIK ENERGI EIGEN ELEKTRON DALAM SUMUR POTENSIAL BERHINGGA

Candra Satrio Umbu Luba, Ali Warsito dan Redi Kristian Pingak

*Prodi Fisika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana, Jl. Adi Sucipto Penfui,
Kota Kupang, Kode Pos 85001, Indonesia
E-mail: candraluba@gmail.com*

Abstrak

Tujuan utama penelitian ini adalah untuk menentukan 2 energi eigen terendah elektron dalam sumur potensial berhingga menggunakan metode Newton-Raphson yang dibandingkan dengan solusi menggunakan metode grafik. Selain itu penelitian ini juga bertujuan menginvestigasi hubungan tinggi potensial dan lebar potensial terhadap nilai eigen energi serta membandingkan hasil yang diperoleh dengan hasil untuk sumur potensial tak hingga. Hasil menunjukkan bahwa akar-akar persamaan x yang didapat menggunakan metode Newton-Raphson dan metode grafik sama serta metode Newton-Raphson memiliki konvergensi yang sangat baik dalam menentukan akar persamaan x baik untuk paritas ganjil maupun paritas genap. Dari akar x yang telah diperoleh menggunakan metode Newton-Raphson, energi elektron pada 2 keadaan terendah ketika tinggi potensial 10 eV dan lebar sumur 3 Å adalah 0,71526926 eV untuk $n=1$ dan 2,8206863 eV untuk $n=2$. Tinggi potensial dan lebar sumur memiliki pengaruh yang kuat terhadap energi yakni ketika tinggi potensial sumur atau lebar sumur semakin besar, energi elektron yang didapat semakin besar, baik untuk paritas ganjil maupun untuk paritas genap. Perbandingan energi sumur potensial berhingga dengan potensial tak hingga menunjukkan bahwa semakin tinggi sumur potensial, energi elektron dalam sumur potensial berhingga semakin mendekati nilai energi untuk sumur potensial tak hingga.

Kata kunci: Potensial Berhingga, Metode Newton-Raphson, Metode Grafik, Paritas Ganjil, Paritas Genap, Persamaan Schrödinger.

Abstract

The main purpose of this study is to determine the 2 lowest energy eigen values of an electron in a finite potential well using the Newton-Raphson method compared to the solution using the graphical method. In addition, this study also aims to investigate the dependence of the energy eigen values on the height and width of the potential well and to compare the results obtained with the corresponding results for the infinite potential well. The results showed that the roots of the equation obtained using the Newton-Raphson method and the graphical method are the same and the Newton-Raphson method has an excellent convergence in determining the root of the x equation both for odd parity and for even parity. From the root x obtained using Newton-Raphson method, the 2 lowest energies of the electron for a potential of height 10 eV and width 3 Å were 0,71526926 eV for $n = 1$ and 2,8206863 eV for $n = 2$. The height and the width of the potential had a large influence on the energies, i.e. the higher the potential well or the wider the well, the greater the energy for both odd parity and even parity. The comparison of the energies of finite potential well with those of the infinite potential well showed that as the potential was higher, the energies of the electron in the finite potential well were closer to the corresponding values for the infinite potential well.

Keywords: Finite potential well, Newton-Raphson method, Graphical method, Odd parity, Even parity, Schrödinger equation

PENDAHULUAN

Persamaan Schrödinger merupakan persamaan yang digunakan untuk menggambarkan sistem kuantum, terutama dalam menentukan energi eigen dan fungsi gelombang partikel yang berukuran mikroskopik atau atomistik. Dalam persamaan Schrödinger 1D terdapat dua jenis variabel yang dapat mempengaruhi sistem kuantum yaitu variabel waktu (t) dan posisi (x). Jika potensial yang ditinjau tidak bergantung waktu, maka dapat dilakukan pemisahan variabel sehingga diperoleh persamaan Schrödinger tidak bergantung waktu [1].

Komputasi sains adalah bagian integral sains modern dengan kemampuan eksploitasi kekuatan komputer secara efektif di dalam aktivitas seorang saintis. Ditinjau dari aspek proses, komputasi adalah kegiatan mendapatkan solusi atau penyelesaian atas persoalan-persoalan yang dinyatakan dalam model matematis. Fisika komputasi merupakan kombinasi dari fenomena-fenomena fisika yang didasarkan pada asas-asas hukum fisika, metode numerik dan pemrograman computer [2].

Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untuk menghitung fungsi gelombang dan energi eigen partikel dalam sistem kuantum. Salah satunya adalah menggunakan metode analitik, seperti solusi analitik untuk memperoleh energi keadaan dasar atom He muonik eksotis menggunakan prinsip variasi [3] dan atom helium menggunakan metode matriks [4]. Selain itu, dapat juga digunakan metode numerik, seperti metode numerik yang mengaplikasikan mekanika matriks dalam menentukan energi keadaan eksitasi pertama triplet ion he-like [5].

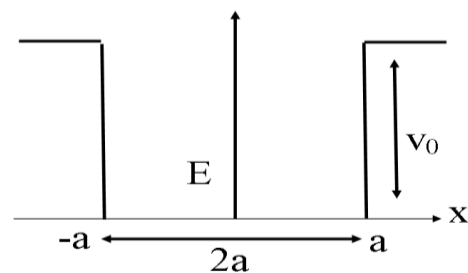
Selain sistem 2 elektron tersebut, masih banyak sistem kuantum yang dapat dipelajari baik dengan metode analitik maupun numerik. Salah satunya adalah sistem potensial berhingga. Beberapa penelitian yang telah dilakukan sebelumnya antara lain [6][7] yang menyelesaikan sistem potensial berhingga menggunakan metode Newton Raphson. Beberapa studi lain pada sistem yang sama adalah [8] yang menggunakan metode iteratif dan metode grafik [9].

Dalam penelitian ini akan dihitung dua tingkat energi eigen terendah elektron di dalam sumur potensial berhingga menggunakan metode grafik dan metode Newton Raphson.

Hubungan tinggi potensial dan lebar potensial dengan nilai eigen energi sistem juga akan diteliti. Selain itu, perbandingan dengan tingkat energi sumur potensial tak hingga juga dilakukan.

METODE

Kasus yang akan dicari solusinya adalah sebagai berikut: kasus sumur potensial berhingga dengan lebar sumur dari $-a$ sampai a dan tinggi potensial V_0 . Ilustrasi kasus dapat dilihat pada gambar 1.



Gambar 1. Model Sumur Potensial Berhingga

Parameter yang menjadi permasalahan dan ingin dicari solusinya adalah energi elektron dalam sumur potensial berhingga dengan mengacu pada persamaan Schrödinger. Untuk menentukan nilai energi eigen elektron dalam sumur maka perlu dilakukan pencarian solusi persamaan Schrödinger untuk mencari akar persamaan x menggunakan metode Newton Raphson untuk memperoleh nilai energi [7].

Fungsi gelombang ψ untuk setiap daerah dapat dinyatakan sebagai berikut [7]:

untuk $x < -a$

$$\psi(x) = C_1 \exp(\kappa x) \text{ dengan } \kappa^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2 \quad (1)$$

untuk $-a < x < +a$

$$\psi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \text{ dengan } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (2)$$

untuk $x > +a$

$$\psi(x) = C_2 \exp(-\kappa x) \text{ dengan } \kappa^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \quad (3)$$

Penerapan syarat kontinuitas pada ψ dan turunannya pada setiap batas dinding menghasilkan:

$$\text{di } x = -a \quad C_1 \exp(-\kappa a) = A \cos(ka) - B \sin(ka) \quad (4)$$

Turunan di $x = -a$
 $\kappa C_1 \exp(-\kappa a) = kA \sin(ka) + kB \cos(ka)$ (5)
 di $x = a$

$C_2 \exp(-\kappa a) = A \cos(ka) + B \sin(ka)$ (6)

Turunan di $x = +a$
 $-\kappa C_2 \exp(-\kappa a) = -kA \sin(ka) + kB \cos(ka)$ (7)

Sebelum dilakukan komputasi numerik untuk menentukan nilai energi untuk setiap keadaan, terlebih dahulu ditentukan bentuk sederhana dari persamaan nonlinear yang dinyatakan dalam variabel yang tidak bergantung energi. Untuk mencapai tujuan tersebut perlu dilakukan penyederhanaan terhadap persamaan (4), (5), (6) dan (7), dari langkah penyederhanaan tersebut akan diperoleh nilai besaran κ dalam A dan B yaitu [7]:

Di $x = -a$
 $\kappa = k \frac{A \sin(ka) + B \cos(ka)}{A \cos(ka) - B \sin(ka)}$ (8)

Di $x = a$
 $\kappa = k \frac{A \sin(ka) - B \cos(ka)}{A \cos(ka) + B \sin(ka)}$ (9)

Salah satu cara yang dapat dilakukan agar persamaan (8) dan (9) untuk κ konsisten adalah dengan menghilangkan salah satu kostanta tersebut pada keadaan – keadaan yang dipenuhi: saat $A \neq 0$ fungsi cosinus paritas +1

$\kappa = k \tan(ka)$ (10)
 saat $B \neq 0$ fungsi sinus paritas -1
 $\kappa = -k \cot(ka)$ (11)

Persamaan (10) dan (11) dinyatakan kembali secara eksplisit terhadap variabel E, maka diperoleh persamaan [7]:

Untuk paritas +1

$$\sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}} \cos\left(a \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\right) - \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \sin\left(a \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\right) = 0$$
 (12)

Untuk paritas -1

$$\sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}} \sin\left(a \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\right) + \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \cos\left(a \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\right) = 0$$
 (13)

Untuk kepentingan komputasi numerik, maka persamaan (12) dan (13) dinyatakan dalam besaran – besaran universal tak berdimensi, oleh sebab itu diasumsikan [7].

$x = (2m a^2 E) / \hbar^2$ (14)
 $E = (x \hbar^2) / (2m a^2)$ (15)
 $J = (2m a^2 V_0) / \hbar^2$ (16)

Selanjutnya, persamaan (12) dan (13) dinyatakan kembali sebagai berikut:

$\sqrt{J-x} \cos \sqrt{x} - \sqrt{x} \sin \sqrt{x} = 0$ (17)

$\sqrt{J-x} \sin \sqrt{x} + \sqrt{x} \cos \sqrt{x} = 0$ (18)

Persamaan (17) dan (18) merupakan persamaan yang ingin dilakukan perhitungan komputasi numerik untuk memperoleh nilai x yang kemudian nilai x tersebut disubstitusi kembali ke persamaan (15) untuk memperoleh nilai E sebagai energi potensial partikel dalam sumur, nilai J pada persamaan (16) merupakan besaran tak berdimensi yang digunakan sebagai nilai input untuk kasus sumur potensial berhingga. Persamaan (17) dan (18) juga akan diselesaikan secara grafik.

Implementasi Metode Grafik

Implementasi metode grafik yang dilakukan yaitu bagaimana menerapkan metode grafik untuk memperoleh solusi persamaan Schrödinger untuk sumur potensial berhingga, kemudian hasil perhitungan akar tersebut dibandingkan dengan hasil perhitungan akar yang diperoleh dengan menggunakan metode numerik dalam hal ini metode Newton Raphson.

Analisa metode grafik untuk menentukan solusi persamaan (17) dan persamaan (18) diikuti langkah langkah berikut

1. Persamaan (17) dan (18) ditulis dalam bentuk:
 $\sqrt{J-x} \cos \sqrt{x} = \sqrt{x} \sin \sqrt{x}$ (19)
 $\sqrt{J-x} \sin \sqrt{x} = -\sqrt{x} \cos \sqrt{x}$ (20)
2. Plot $\sqrt{J-x} \cos \sqrt{x}$ versus x dan $\sqrt{x} \sin \sqrt{x}$ versus x untuk persamaan (19) dan plot $\sqrt{J-x} \sin \sqrt{x}$ versus x dan $-\sqrt{x} \cos \sqrt{x}$ versus x untuk persamaan (20).

Implementasi Metode Newton Raphson

Implementasi metode numerik yaitu dengan menggunakan metode Newton Raphson dilakukan untuk memperoleh akar-akar persamaan Schrödinger yang telah dimodifikasi menjadi persamaan (17) dan persamaan (18).

Analisa komputasi dalam bentuk perancangan flowchart (diagram alir) sebagai alur logika dan algoritma merupakan landasan dalam penulisan sintaks program. Prosedur dalam program sesuai dengan metode-metode yang digunakan untuk analisa komputasi. Adapun prosedur tersebut antara lain:

1. Prosedur Newton-Raphson

Sebelum melakukan perhitungan numerik menggunakan metode Newton Raphson, terlebih dahulu menentukan turunan dari persamaan (17) persamaan (18).

Untuk paritas +1, f_x yang digunakan adalah persamaan (17) dengan turunan persamaan sebagai berikut:

$$f'(x) = \frac{-\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{-x}} - \frac{\sqrt{-x} \sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{\cos\sqrt{x}}{2} = 0(21)$$

Untuk paritas -1, f_x yang digunakan adalah persamaan (18) dan turunan persamaan adalah sebagai berikut:

$$f'(x) = \frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{-x}} + \frac{\sqrt{-x} \cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sin\sqrt{x}}{2} = 0(22)$$

Setelah ditentukan turunan persamaan (17) dan (18), selanjutnya dibuat algoritma Newton Raphson:

Masukan nilai V_0 dan a

Hitung nilai J

Tampilkan nilai J

Masukan tebakan awal x_0

Definisikan $f(x)$, $f'(x)$, x_0 , tol

Hitung harga $f(x_0)$ dan $f'(x_0)$

Hitung harga x

Hitung harga E

Tampilkan harga x , iterasi dan E

HASIL DAN PEMBAHASAN

Implementasi Metode Grafik

Implementasi metode grafik yang telah dibuat untuk memperoleh solusi persamaan Schrödinger sumur potensial berhingga, tujuan penggunaan metode grafik adalah untuk menguji kebenaran solusi persamaan Schrödinger untuk kasus sumur potensial berhingga yang dilakukan secara numerik dalam hal ini metode Newton Raphson.

Implementasi Metode Newton-Raphson

Penerapan metode Newton-Raphson dilakukan dengan mencari akar-akar persamaan x dari persamaan (17) dan (18) yang

kemudian dimasukkan dalam persamaan energi yakni persamaan (15) untuk memperoleh energi eigen elektron dalam sumur potensial. Perhitungan nilai x yang dilakukan pada implementasi metode Newton-Raphson dalam penelitian menggunakan bahasa pemrograman Pascal.

Implementasi Bahasa Pemrograman Pascal dalam Penentuan Solusi Persamaan Schrödinger

Implementasi bahasa pemrograman Pascal dilakukan dengan menuliskan kode program untuk memperoleh akar persamaan (17) dan (18) dengan mengikuti alur logika metode Newton Raphson yaitu dengan mendefinisikan persamaan (17) dan (18) sebagai f_x dan persamaan (21) dan (22) sebagai f'_x . Pada kode program yang dibuat akar persamaan x diperoleh dengan menggunakan persamaan (15). Perancangan program terdiri dari 8 prosedur yang dibuat, prosedur tersebut yakni 2 prosedur untuk perhitungan akar x dan energi dengan memvariasi tinggi potensial, kemudian 2 prosedur untuk variasi lebar potensial, kemudian 2 prosedur untuk perhitungan energi variasi tinggi potensial yang dibandingkan dengan hasil perhitungan energi literasi dan 2 prosedur untuk menghitung energi variasi lebar sumur yang dibandingkan dengan perhitungan energi literasi, prosedur tersebut merupakan perhitungan untuk 2 keadaan terendah yakni $n=1$ dan $n=2$.

Analisa Solusi Numerik Persamaan Schrödinger Variasi Tinggi Potensial

Hasil perhitungan dapat dilihat pada Tabel 1. Berdasarkan data perhitungan pada Tabel 1, dapat dilihat bahwa setelah dilakukan perhitungan akar x dengan menggunakan metode Newton Raphson dan metode grafik pada kasus sumur potensial berhingga untuk $n=1$ dan $n=2$ diperoleh harga akar x yang sama pada setiap tinggi potensial V_0 (sampai 6 angka desimal).

Tabel 1. Hasil perhitungan solusi akar x menggunakan Metode Grafik (MG) dan Metode Newton-Raphson (MNR) untuk variasi tinggi potensial.

V_0 (eV)	x MG		x MNR	
	n = 1	n = 2	n = 1	n = 2

5	1,466063	5,65343	1,466063	5,65343
10	1,690145	6,66514	1,690145	6,66514
15	1,804237	7,15830	1,804237	7,15830
20	1,877297	7,46807	1,877297	7,46807
25	1,929513	7,68699	1,929513	7,68699
50	2,068137	8,25989	2,068137	8,25989
100	2,174778	8,69412	2,174778	8,69412
500	2,329821	9,31876	2,329821	9,31876
1000	2,368916	9,47547	2,368916	9,47547
1x10 ⁴	2,435608	9,74243	2,435608	9,74243
1x10 ⁶	2,464194	9,85678	2,464194	9,85678

Analisa Solusi Numerik Persamaan Schrödinger Variasi Lebar Potensial

Berdasarkan data perhitungan pada tabel 2 dapat dilihat bahwa setelah dilakukan perhitungan akar x dengan

menggunakan metode Newton Raphson dan Metode Grafik pada kasus sumur potensial berhingga untuk $n = 1$ dan $n = 2$ diperoleh harga akar x yang sama pada setiap lebar potensial.

Tabel 2. Hasil perhitungan solusi akar x menggunakan Metode Grafik (MG) dan Metode Newton-Raphson (MNR) untuk Variasi lebar sumur potensial.

a (Å)	X MG		X MNR	
	n=1	n=2	n=1	n=2
1	0,8963785	2,6195298	0,8963785	2,6195298
2	1,4246761	5,4587842	1,4246761	5,4587842
3	1,6901448	6,6651378	1,6901448	6,6651378
4	1,8481732	7,3450976	1,8481732	7,3450976
5	1,9528436	7,7842109	1,9528436	7,7842109
6	2,027250	8,0920327	2,027250	8,0920327

Analisa Pengaruh Tinggi Potensial Terhadap Energi Eigen

Analisa pengaruh tinggi potensial terhadap 2 nilai energi eigen terendah electron ditampilkan pada Tabel 3. Hasil ini menunjukkan bahwa pada $n=1$ dan $n=2$ semakin

tinggi potensial maka energi eigen elektron semakin besar. Pada Tabel 2 terlihat bahwa walaupun potensial yang dialami oleh elektron berhingga, namun karena $E < V_0$, energinya tetap diskrit, Energi yang diskrit itu merupakan ciri partikel dalam sumur potensial [10].

Tabel 3. Pengaruh Tinggi Potensial terhadap energi eigen elektron dalam sumur potensial berhingga untuk $n=1$ (E_1) dan $n=2$ (E_2).

V_0 (eV)	E_1 (eV)	E_2 (eV)
5	0,62043782	2,3925323
10	0,71526926	2,8206863

15	0,76355305	3,0293929
20	0,79447202	3,1604874
25	0,81657001	3,2531366
50	0,87523559	3,4955854
100	0,92036604	3,6793534
500	0,98598005	3,9436994
1x10 ³	1,0025253	4,0100199
1x10 ⁴	1,0307495	4,1229951
1x10 ⁶	1,0428469	4,1713875

Analisa Pengaruh Lebar Sumur Potensial Terhadap Energi

Nilai energi E_1 dan E_2 untuk beberapa variasi lebar potensial ditampilkan pada Tabel 4.

Tabel 4. Pengaruh lebar sumur terhadap energi eigen elektron dalam sumur potensial berhingga untuk $n=1$ (E_1) dan $n=2$ (E_2).

a (Å)	E_1 (eV)	E_2 (eV)
1	3,4141262	-
2	1,3565766	5,1978543
3	0,71526926	2,8206863
4	0,43995764	1,7485005
5	0,29751962	1,1859401
6	0,21448305	0,85613706

Hasil Perhitungan pada Tabel 4 menunjukkan bahwa pada tinggi potensial yang sama dengan lebar sumur potensial yang divariasi energi eigen elektron pada $n=1$ dan

$n=2$ semakin kecil. Pada penelitian ini untuk $n=2$ dan lebar sumur 1 Å tidak diperoleh akar dan nilai Energi, tidak diperoleh dan energi tersebut dikarenakan pada lebar sumur 1 Å solusi akar x yang diperoleh menggunakan metode Newton Raphson hanya ada 1 solusi yaitu pada $n=1$ atau pada paritas ganjil.

Perbandingan Energi Eigen Elektron Sumur Potensial Berhingga dan Potensial Tak Hingga

Perbandingan energi eigen electron dalam sumur potensial berhingga dan tak hingga ditampilkan pada Tabel 5. Data pada tabel 5 dapat dilihat bahwa presentase selisih energi elektron dalam potensial berhingga dan tak hingga semakin kecil ketika sumur potensial semakin tinggi. Artinya, nilai energi eigen elektron dalam sumur potensial berhingga semakin mendekati nilai energi eigen elektron pada sumur potensial tak hingga untuk state yang sama.

Tabel 5. Tabel perbandingan Energi Eigen potensial Berhingga dan Tak hingga. Nilai energi dinyatakan dalam Ev.

V_0 (eV)	E_1 (Berhingga)	% selisih	E_2 (Berhingga)	% Selisih
5	0,62043782	85,14	2,3925323	85,67
10	0,71526926	82,86	2,8206863	83,11
15	0,76355305	81,71	3,0293929	81,86
20	0,79447202	80,97	3,1604874	81,07
25	0,81657001	80,44	3,2531366	80,51
50	0,87523559	79,03	3,4955854	79,06
100	0,92036604	77,95	3,6793534	77,96
500	0,98598005	76,38	3,9436994	76,38
1x10 ³	1,0025253	75,98	4,0100199	75,98
1x10 ⁴	1,0307495	75,30	4,1229951	75,30
1x10 ⁶	1,0428469	75,02	4,1713875	75,05

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Nilai eigen energi 2 keadaan terendah elektron dalam potensial berhingga telah

berhasil dihitung menggunakan metode Newton Raphson. Nilai-nilai E_1 dan E_2 ini bersesuaian dengan hasil yang diperoleh dengan metode grafis. Sementara itu, semakin tinggi sumur

potensial berdampak pada semakin besarnya nilai E1 dan E2 untuk lebar potensial yang sama dan semakin lebar sumur

potensial nilai E1 dan E2 semakin kecil untuk tinggi potensial yang sama. Selain itu, perbandingan dengan nilai eigen energi sumur potensial tak hingga menunjukkan bahwa presentasi selisih kedua nilai energi tersebut semakin kecil ketika tinggi sumur potensial berhingga semakin besar.

Saran

Berdasarkan hasil penelitian, maka penulis menyampaikan beberapa saran yaitu:

Pada kasus ini penulis hanya melakukan perhitungan energi pada $n = 1$ dan $n = 2$, sehingga penulis menyarankan untuk ada penelitian lanjutan untuk nilai-nilai n yang lain.

Pada penelitian ini penulis menggunakan Metode Newton Raphson untuk menentukan akar persamaan x untuk sumur potensial berhingga, oleh karena itu penulis menyarankan untuk dilakukan penelitian lanjutan dengan menggunakan metode numerik lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- 1 Pingak RK. Bahan Ajar Fisika Kuantum II. Universitas Nusa Cendana. 2015.
- 2 Warsito A. Fisika Komputasi. Modul Bahan Ajar Fisika FST Undana. 2009.
- 3 Boimau E, Pingak RK, Bernandus. 2017. Penentuan Energi Keadaan Dasar Sistem Atom Helium Muonik Eksotis ($He2+\mu-\mu-$) menggunakan Prinsip

Variasi. J. Fis. Fis. sains dan Apl. **2**(1): 1.

- 4 Pingak RK, Kolmate R, Bernandus. 2019. A Simple Matrix Approach to Determination of the Helium Atom Energies. J. Penelit. Fis. dan Apl. **9**(1): 10.
- 5 Pingak R. K., Deta UA. 2020. A Simple Numerical Matrix Method for Accurate Triplet-1s2s 3S1 energy levels of some light Helium-like Ions. J. Phys. Conf. Ser. **1491**: 012035.
- 6 Olanipekun AJ, Michael AA, Oluwaseun A. 2012. Application of Newton Raphson Method To a Finite Barrier Quantum Well (Fbqw) System. Int. J. Recent Res. Appl. Stud. **13**(1): 88.
- 7 Supardi. 2014. Kajian Metode Newton-Raphson Untuk Menentukan Keadaan Energi Terikat Pada Sistem Potensial Sumur Berhingga. Jurdik Fis. FMIPA Univ. Negeri Yogyakarta. 1.
- 8 Al-ani LA, Abid RK. 2019. Solving Schrödinger Equation for Finite Potential Well Using the Iterative Method. Al-Nahrain J. Sci. **22**(4): 52.
- 9 Lima FM. 2014. A simpler graphical solution and an approximate formula for energy eigenvalues in finite square quantum wells. Am. J. Phys. **88**(11): 1019.
- 10 Siregar R. Fisika kuantum. Departemen fisika. Fakultas MIPA Universitas Padjajaran, Jawa Barat. 2018.