PENERAPAN ALGORITMA *DEMINA-KUDRYASHOV* DALAM MENENTUKAN SOLUSI MEROMORFIK PERSAMAAN OSTROVSKY

Herry F. Lalus
Jurusan Fisika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana, Jl. Adisucipto, Penfui-Kota Kupang
E-mail : herrylalus@gmail.com

Abstrak

Persamaan Ostrovsky merupakan persamaan diferensial parsial nonlinear yang dapat ditemukan dalam fenomena fisis seperti tsunami. Persamaan ini telah memiliki banyak solusi khusus analitik terutama untuk menggambarkan penjalaran gelombang soliton. Salah satu solusi khusus yang terkenal berupa solusi tanh kuadrat atau dapat juga dinyatakan dalam sech kuadrat. Paper ini mengkaji solusi meromorfik persamaan Ostrovsky dengan menggunakan algoritma Demina-Kudryashov. Mula-mula, persamaan Ostrovsky ditransformasi ke dalam bentuk persamaan diferensial biasa nonlinear menggunakan model penjalaran gelombang dan selanjutnya diterapkan algoritma tersebut untuk memperoleh solusi meromorfik berdasarkan pada uraian Laurentnya. Solusi yang diperoleh berupa solusi periode tunggal, solusi periode ganda (solusi eliptik), dan solusi rasional, di mana solusi-solusi ini bersifat umum. Pada akhirnya, ditampilkan suatu solusi khusus berupa solusi tanh kuadrat sebagai pemilihan keadaan khusus berdasarkan salah satu solusi meromorfik.

Kata kunci : *solusi meromorfik; algoritma Demina-Kudryashov; persamaan Ostrovsky*.

Abstract

Ostrovsky equation is a nonlinear partial diferential equation which we found in many problems of physics such as tsunami. This equation has many special analytical solutions especially for describing the travelling of soliton. One of the famous special solution is containing quadratic tanh *term or we can express it in* sech *term. In this paper, the meromorphic solutions of Ostrovsky equation have analyzed by using Demina-Kudryashov algorithm. Firstly, this equation was transformed to nonlinear ordinary differential equation by using travelling wave model and then by using this algorithm and based on Laurent series, the meromorphic solutions can be contructed. Finally, the general solutions was found. These solutions take form in three types, such as simply periodic, doubly periodic (elliptic solutions), and rational solution. And then, the special solution of this equation was showed by choosing a special condition.*

Keywords : *meromorphic solutions; Demina-Kudryashov algorithm; Ostrovsky equation.*

PENDAHULUAN

Dewasa ini, telah dikembangkan banyak metode untuk memperoleh solusi eksak dari persamaan-persamaan diferensial nonlinear autonomos. Beberapa jenis metode tersebut yaitu metode fungsi tanh-coth [1]; metode modifikasi tanh-coth [2]; metode eksponensial [3,4], metode *G'/G* [5], dan berbagai metode modifikasi lainnya [6,7]. Namun, muncul pertanyaan penting berikut. Apakah melalui metode-metode tersebut dapat diperoleh solusi-solusi umum? Atau dengan kata lain, apakah dapat diperoleh keluarga solusi (*solutions family*) dari persamaan diferensial yang dikaji? Tentu saja jawaban untuk pertanyaan ini hampir jarang ditemukan (beberapa jawaban dapat dilihat pada [8,9,10]). Namun, pada tahun 2010, Maria Demina dan Nikolay Kudryashov memperkenalkan suatu algoritma penting yang dapat digunakan untuk mengkonstruksi solusi meromorfik (solusi yang bersifat umum) untuk persoalan di atas [9] .

Paper ini secara khusus membahas tentang solusi meromorfik persamaan Ostrovsky. Persamaan Ostrovsky merupakan persamaan diferensial parsial nonlinear dengan suku derivatif tertinggi berorde tiga yang ditemukan dalam fenomena fisis seperti tsunami [8,11,12,13]. Persamaan Ostrovsky ini mula-mula ditransformasi dengan menggunakan model penjalaran gelombang untuk meng-hasilkan persamaan diferensial biasa nonlinear yang selanjutnya dengan menggunakan algoritma *Demina-Kudryashov* akan dibentuk solusi meromorfik berupa solusi periode tunggal, solusi periode ganda (solusi eliptik), dan solusi rasional. Struktur dari paper ini adalah sebagai berikut. Bagian pertama merupakan pendahuluan. Bagian kedua membahas tentang solusi meromorfik dan algortima *Demina-Kudryashov*. Pada bagian ketiga dibahas tentang konstruksi solusi meromorfik berdasarkan algoritma tersebut. Sebagai tambahan, ditampilkan suatu solusi khusus berdasarkan salah satu solusi meromorfik yang diperoleh sebelumnya. Solusi khusus ini merupakan bentuk verifikasi terhadap salah satu solusi khusus yang telah terkenal selama ini [12,13].

SOLUSI MEROMORFIK DAN ALGORITMA *DEMINA-KUDRYASHOV*

Misalkan ditinjau suatu persamaan autonomos [9,10]

$$E[w(z)] = 0\,. \qquad (1)$$

Suatu persamaan autonomos dapat memiliki solusi eksak meromorfiknya jika persamaan tersebut memiliki solusi Laurent (ekspansi asimptotik) persamaan (1). Solusi eksak meromorfik persamaan (1) dapat dipenuhi oleh uraian Laurent berikut [8,9,10]

$$w(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad ; \; m < 0 \; ; \; c_m \neq 0. \qquad (2)$$

Berikut disajikan suatu teorema penting sebagai dasar untuk mengkonstruksi solusi meromorfik. Tanpa mengurangi generalitasnya, untuk sementara konstanta z_0 tidak dimasukkan dalam perhitungan.

Teorema 1. *Semua solusi meromorfik dari persamaan (1) dengan hanya satu ekspansi asimptotik yang sesuai untuk uraian Laurent dalam suatu lingkungan pole* $z = 0$ *memiliki bentuk :*

1. *Solusi eliptik dengan periode* $2\omega_1, 2\omega_2$ *dengan satu pole orde* p *memiliki bentuk*

$$w(z) = \left(\sum_{k=2}^{p} \frac{(-1)^k c_{-k}}{(k-1)!} \frac{d^{k-2}}{dz^{k-2}} \right) \wp(z;\omega_1,\omega_2) + h_0\,. \qquad (3)$$

Syarat perlu untuk eksistensi solusi eliptik adalah $c_{-1} = 0.$

2. *Solusi periode tunggal dengan periode* T *dan orde pole* p *memiliki bentuk*

$$w(z) = \frac{\pi}{T} \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1} c_{-k}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \right) \cot\left(\frac{\pi z}{T} \right) + h_0\,. \qquad (4)$$

3. *Solusi rasional*

$$w(z) = \sum_{k=1}^{p} \frac{c_{-k}}{z^k} + \sum_{k=0}^{m} c_k z^k \quad ; m \geq 0$$

$$w(z) = \sum_{k=0}^{m} h_k z^k \quad ; \; m \geq 0. \qquad (5)$$

Di mana, (1), (2), (3), h_k, $0 \leq k \leq m$ *merupakan konstanta-konstanta, dan* $\wp$ *merupakan fungsi eliptik Weierstrass.*

Berikut, disajikan algoritma *Demina-Kudryashov* untuk mengkonstruksi solusi meromorfik. *Pertama*, persamaan (2) dimasukkan ke per-samaan diferensial nonlinear yang dikaji dan kemudian diekspansi di sekitar $z = 0$. *Kedua*, memilih bentuk solusi meromorfik berdasarkan teorema 1 di atas. Solusi meromorfik yang dipilih dapat berupa solusi periode tunggal, solusi eliptik, maupun solusi rasional. Namun, harus diperhatikan syarat perlu eksistensi solusi meromorfik berdasarkan teorema tersebut. *Ketiga*, menguraikan solusi meromorfik yang telah dipilih di sekitar pole-nya. *Keempat*, membandingkan koefisien-koefisien hasil ekspansi solusi meromorfik terhadap solusi asimptotik yang telah diperoleh sebelumnya. Selanjutnya, melakukan perhitungan aljabar untuk menentukan parameter-parameter solusi meromorfik yang dibutuhkan. Namun, jika tidak terdapat kekonsistenan antara koefisien-koefisien tersebut, maka persamaan tersebut tidak memiliki solusi meromorfik sebagaimana solusi meromorfik yagn diusulkan. *Kelima*, memverifikasi solusi meromorfik yang telah diperoleh dengan memasukkannya kembali ke persamaan diferensial nonlinear yang dikaji.

SOLUSI MEROMORFIK PERSAMAAN OSTROVSKY

Persamaan Ostrovsky dapat ditulis sebagai berikut [8,12,13]

$$\psi \frac{\partial^3 \psi}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + \psi^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

Dengan menggunakan model penjalaran gelombang (*traveling wave*) $\psi(x,t) = w(z)$; $z = x - C_0 t$ diperoleh

$$w \frac{d^3 w}{dz^3} - \frac{dw}{dz}\frac{d^2 w}{dz^2} + w^2 \frac{dw}{dz} = 0. \tag{7}$$

Dengan memasukkan persamaan (2) ke dalam persamaan (7) diperoleh uraian Laurent berikut

$$w(z) = -\frac{6}{z^2} + a_0 - \frac{a_0^2}{10} z^2 + a_4 z^4 - \frac{a_0^4}{1800} z^6 + \dots \tag{8}$$

Persamaan (8) merupakan solusi Laurent dari persamaan (7). Solusi di atas memiliki pole orde dua dan mempunyai tiga konstanta sembarang yaitu a_0, a_4 dan z_0.

Terlihat dari persamaan (8) bahwa persamaan (7) hanya memiliki satu jenis solusi Laurent, maka dapat dibentuk satu tipe solusi meromorfik berdasarkan teorema 1 di atas. Berikut solusi-solusi meromorfik yang dapat dibentuk.

Pertama, terlihat dari solusi Laurent (8) di atas bahwa residu $c_{-1} = 0$ maka dapat dibentuk solusi eliptik. Berdasarkan persamaan (3), diperoleh bentuk

$$w(z) = c_{-2}\wp + h_0. \tag{9}$$

Persamaan di atas diekspansi di sekitar titik $z = 0$ menghasilkan

$$\begin{aligned} w(z) = {} & \frac{c_{-2}}{z^2} + h_0 + \frac{c_{-2} g_2}{20} z^2 + \frac{c_{-2} g_3}{28} z^4 \\ & + \frac{c_{-2} g_2^2}{1200} z^6 + \dots \end{aligned} \tag{10}$$

Selanjutnya, dengan membandingkan koefisien-koefisien persamaan (10) dan (8), diperoleh

$$\begin{aligned} & c_{-2} = -6\ ;\ h_0 = a_0 \\ & g_2 = \frac{a_0^2}{3};\ g_3 = \frac{-14 a_4}{3}; \end{aligned} \tag{11}$$

Dengan demikian, solusi eliptik persamaan Ostrovsky dapat dituliskan

$$w(z) = -6\wp\left(z; \frac{a_0^2}{3}; \frac{-14 a_4}{3}\right) + a_0. \tag{12}$$

Berikutnya adalah membentuk solusi periode tunggal. Berdasarkan persamaan (4), diperoleh

$$w(z) = -\sqrt{L} c_{-2} \frac{d}{dz} \cot\left(\sqrt{L} z\right) + h_0, \tag{13}$$

atau persamaan di atas menjadi

$$w(z) = h_0 + c_{-2} L + c_{-2} L \cot^2\left(\sqrt{L} z\right). \tag{14}$$

Dengan mengekspansi persamaan (13) atau (14), diperoleh

$$\begin{aligned} w(z) = {} & \frac{c_{-2}}{z^2} + h_0 + \frac{c_{-2} L}{3} + \frac{c_{-2} L^2}{15} z^2 \\ & + \frac{2 c_{-2} L^3}{189} z^4 + \dots \end{aligned} \tag{15}$$

Selanjutnya, membandingkan persamaan (15) dengan persamaan (8), diperoleh

$$\begin{aligned} & c_{-2} = -6;\ h_0 = a_0 + 2L_j; \\ & L_j = \frac{a_0}{4}\kappa_j\ ;\ \kappa_1 = 1;\ \kappa_2 = -1 \end{aligned} \tag{16}$$

Sehingga, solusi periode tunggal persamaan Ostrovsky dapat ditulis

$$w(z) = a_0 - 4L_j - 6L_j \cot^2\left(\sqrt{L_j}\, z\right). \tag{17}$$

Kemudian, berdasarkan solusi Laurent (8), maka solusi rasionalnya memiliki bentuk

$$w(z) = -\frac{6}{z^2} + a_0. \tag{18}$$

Berikut disajikan pemilihan keadaan khusus untuk mendapatkan solusi khusus persamaan Ostrovsky berupa solusi fungsi tanh. Bagian ini digunakan salah satu solusi meromorfik yaitu solusi periode tunggal (17) namun dengan menyatakannya secara utuh (konstanta z_0

kembali dimasukkan dalam perhitungan) sebagai berikut

$$w(z) = a_0 - 4L_j - 6L_j \cot^2\left(\sqrt{L_j}(z - z_0)\right). \quad (19)$$

Terdapat identitas

$$\cot(i\theta) = -i \coth\theta\,, \quad (20)$$

$$\tanh\theta = \coth\left(\theta - \frac{i\pi}{2}\right), \quad (21)$$

Dengan memilih $L_j < 0$, maka identitas cotangen persamaan persamaan (19) akan menjadi cotangen hiperbolik. Terlihat juga bahwa cotangen hiperbolik dan tangen hiperbolik hanya berbeda fase sebesar $i\pi/2$, maka kita dapat memilih fase di mana θ digeser sejauh $i\pi/2$ sehingga identitas cotangent hiperbolik menjadi tangen hiperbolik. Oleh karena itu, dengan memilih $z_0 = i\pi/2$ dan dengan memanfaatkan identitas (21), persamaan (19) menjadi

$$w(z) = a_0 - 4L_j - 6L_j \tanh^2\left(\sqrt{L_j}\, z\right). \quad (22)$$

Dari definisi $w(z) = \psi(x,t)$; $z = x - C_0 t$, maka persamaan (22) dapat ditulis

$$w(z) = a_0 - 4L_j - 6L_j \tanh^2\left(\sqrt{L_j}(x - C_0 t)\right). \quad (23)$$

Solusi (23) ini merupakan konfirmasi terhadap solusi *well-known* persamaan Ostrovsky [12,13]. Ini menunjukkan bahwa solusi yang meromorfik yang diperoleh ini bersifat umum. Solusi (23) merupakan solusi yang dikenal dengan nama solusi soliton persamaan Ostrovsky. Dengan demikian telah terbukti bahwa solusi soliton di atas merupakan salah satu solusi khusus dari persamaan Ostrovsky. Ini menunjukkan bahwa solusi meromorfik dalam kajian ini menyediakan beberapa kemungkinan solusi *traveling wave* lain di samping solusi soliton tersebut. Kita dapat memilih keadaan yang memungkinkan untuk membentuk solusi khusus lain berdasarkan syarat-syarat eksistensi solusi meromorfik di atas.

SIMPULAN DAN SARAN

Dalam paper ini, telah dikaji solusi meromorfik persamaan Ostrovsky. Solusi meromorfik yang dikaji berupa solusi periode tunggal, periode ganda (solusi eliptik), dan solusi rasional. Solusi-solusi meromorfik yang diperoleh ini merupakan ”keluarga solusi” dari persamaan Ostrovsky, yang darinya dapat diturunkan solusi-solusi khusus bentuk lain dengan memanfaatkan identitas-identitas trigonometri, fungsi hiperbolik, maupun konstan-kontanta. Konstruksi solusi meromorfik persamaan Ostrovsky ini didasarkan pada algoritma yang diperkenalkan oleh Maria Demina dan Nikolay Kudryashov pada tahun 2010. Algoritma ini mengacu pada eksistensi uraian Laurent persamaan diferensial nonlinear. Algoritma ini juga menjadi suatu metode yang sangat *powerful* sehingga dapat diterapkan dalam pemecahan persoalan atau persamaan-persamaan serupa yang tentunya didasarkan pada syarat-syarat eksistensi solusi yang diberikan. Sebagai bagian akhir, juga telah diberikan suatu bentuk solusi khusus, yang mana merupakan solusi soliton persamaan Ostrovsky yang sudah sangat terkenal.

DAFTAR PUSTAKA

1. S. Cesar A. Gómez, Alvaro H. Salas, Bernardo Acevedo Frias. 2010. “New periodic and soliton solutions for the Generalized BBM and Burgers–BBM equations”, Applied Mathematics and Computation 217 . 1430–1434.
2. Wazzan L. 2009 . “A modified tanh-coth method for solving the KdV and the KdV-Burgers equations” Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat; 14: 443-50.
3. Inan Ibrahim E. and Yavuz Ugurlu. 2010. “Exp-function method for the exact solutions of fifth order KdV equation and modified Burgers equation”, Applied Mathematics and Computation 217. 1294–1299.
4. Borhanifar A. and M.M. Kabir. 2009. “New periodic and soliton solutions by application of Exp-function method for nonlinear evolution equations”, Journal of Computational and Applied Mathematics 229 . 158-167.
5. Li. Zi-Liang. 2010. “Constructing of new exact solutions to the GKdV–mKdV equation with any-order nonlinear terms by (*G’/G*) -expansion method”, Applied

Mathematics and Computation 217 . 1398–1403.

6. Akbar M. A. 2013. Norhashidah H. M. A. and S. T. Mohyud-Din, "Assessment of the further improved *G'/G* -expansion method and the extended tanh-method in probing exact solutions of nonlinear PDEs", Akbar et al. SpringerPlus, 2:326.
7. Li Z. And Zhengde Dai. 2010. "Abundant new exact solutions for the *(*3+1*)*-dimensional Jimbo–Miwa equation", J. Math. Anal. Appl. 361 . 587–590.
8. Kudryashov N. A. 2011. "Meromorphic solutions of nonlinear ordinary differential equations", arXiv: 1201.0126v1 [nlin.SI].
9. Demina, M. V and N. A Kudryashov. 2011. Explicit expressions for meromorphic solution of autonomous nonlinear ordinary differential equations", arXiv: 1112.5445v1 [nlin.PS].
10. Lalus H. F. 2014. "Solusi Meromorfik Persamaan Korteweg-de Vries, Kawahara, Ginzburg-Landau, dan Aplikasinya", Tesis S2, Institut Teknologi Bandung.
11. Drazin P. G. and R. S. Johnson. 1996. "Solitons : an Introduction", Cambridge University Press.
12. Kangalgil F., Ayaz F.. 2008. New exact travelling wave solutions for the Ostrovsky equation, Phys. Lett. A;372:1831 – 1835.
13. Koroglu C., Ozis T. 2009. New exact travelling wave solutions for the Ostrovsky equation using Exp-function method, Comput. Math. Appl. doi:10.10.1016/j.camwa.2009.03.028.