PENENTUAN ENERGI KEADAAN DASAR SISTEM ATOM HELIUM MUONIK EKSOTIS ($He^{2+}\mu^{-}\mu^{-}$) MENGGUNAKAN PRINSIP VARIASI

Elisabeth Boimau, Redi Pingak, Bernandus
Jurusan Fisika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana, Kupang 85111 Indonesia
Email: Elisabethboimau@gmail.com

Abstrak

Telah dilakukan kajian teoritik penentuan energi keadaan dasar sistem atom helium muonik eksotis dengan pendekatan prinsip variasi. Ide dasar dari metode ini adalah memilih sebuah fungsi gelombang coba yang berisikan sebuah parameter yang bias disesuaikan nilainya dan meminimalkan nilai ekspektasi operator Hamiltonian yang disebut energi rata-rata. Fungsi gelombang coba yang digunakan dalam penelitian adalah fungsi gelombang keadaan dasar ion hidrogenik (pendekatan orbital). Operator Hamiltonian sistem atom helium muonik eksotis ini dioperasikan pada fungsi gelombang coba dan nilai energi rata-rata yang diperoleh diminimalkan sehingga diperoleh nilai energi keadaan dasar sistem ini sekitar $-32{,}1\ KeV$. Nilai ini lebih besar dari pada nilai total energi keadaan dasar baik pada sistem atom helium($-78{,}8\ eV$) maupun pada sistem atom $He^{2+}e^{-}\mu^{-}$($-10{,}9\ KeV$). Hal ini disebabkan oleh perbedaan massa tereduksi sistem-sistem ini dalam pendekatan orbital.

Kata Kunci: Ion hidrogenik, Energi keadaan dasar, Fungsi gelombang coba, Pendekatan orbital, Prinsip Variasi.

Abstract

The study on the determination of ground state energy of exotic muonic helium system by variational principle approximation has been done. The basic ideas of this method are to choose a trial wave function consisting of an adjustable variational parameter and to minimize the expectation value of its Hamiltonian operator which is called the average energy. The trial wave function used is the ground state hydrogenic ion wave function (orbital approximation). The operator Hamiltonian of this system is operated on the trial wave function and its value is minimized, from which the ground state energy of this system was found to be about $-32{,}1\ KeV$. This value is greater than that of both He $-78{,}8\ eV$ atom and $He^{2+}e^{-}\mu^{-}$ system $-10{,}9\ KeV$. This difference is caused by the difference in the reduced masses of these systems in the orbital approximation.

***Key words**: Hydrogenic ions, Ground state energy, Trial wave function, Orbital approximation, Variational Principle.*

PENDAHULUAN

Teori kuantum dikembangkan setelah mengamati bahwa benda mikroskopik seperti atom dan molekul, mempunyai perilaku yang sangat berbeda dari perilaku benda makroskopik yang kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari. Hasil dari perkembangan teori ini melandasi semua perkembangan teknologi bahkan sampai pada skala nano [1].

Umumnya materi tersusun atas partikel-partikel elementer yang terdiri dari fermion dan boson. Fermion adalah kumpulan partikel atau sistem partikel yang memenuhi distribusi statistik Fermi-Dirac, yang dicirikan oleh berspin tengahan kelipatan ganjil bilangan bulat dan memenuhi asas larangan Pauli, sedangkan boson adalah kumpulan partikel atau sistem partikel yang memenuhi distribusi statistik Bose-Einstein yang berciri berspin bilangan bulat dan kelipatannya, dan tidak memenuhi asas larangan Pauli [2].

Yang termasuk jenis keluarga fermion adalah kuark dan lepton. Lepton merupakan partikel elementer yang paling sederhana dan hampir mendekati partikel titik. Lepton memiliki keluarga sebagai berikut elektron (e^{-}) dan neutrino elektron (ν_e), muon (μ^{-}) dan neutrino muon (ν_μ), tau (τ) dan neutrino tau (ν_τ) beserta anti partikelnya masing-masing.

Penelitian tentang muon telah dilakukan sejak tahun 1950'an (Egan, 1981) dan mulai berkembang pesat sejak penggandaan produksi muon di NCC (*Nevis Columbia Cyclotron*) dan

CERN-Sc tahun 1957. Penelitian tentang muon ini dapat memberikan penjelasan teoritis dan menemukan aplikasi-aplikasi yang potensial pada beberapa bidang ilmu tertentu seperti pada fisika nuklir, fisika atom, fisika zat padat, ilmu kimia, dan metrologi [3].

Ketika muon berikatan dengan inti atom helium sehingga terbentuk sistem atom helium muonik, interaksi antar momen magnetik muon dan momen magnetik elektron menghasilkan struktur hiperhalus pada tingkat-tingkat energinya dan juga penelitian spektrum energi keadaan terikat sistem 3 partikel ini dibutuhkan untuk menguji teori elektrodinamika kuantum lebih lanjut [4].

Atom muonik sering disebut atom eksotis karena memiliki sebuah partikel tidak stabil. Penangkapan muon oleh atom untuk membentuk atom-atom atau molekul-molekul muonik eksotis telah diteliti secara intensif. Salah satunya oleh Eskandari dan Rezaie [5], yang menggunakan syarat-syarat batas untuk menghitung energi keadaan dasar atom-atom helium muonik.

Salah satu kajian penting dalam studi atom-atom eksotis ini adalah penentuan energi keadaan dasarnya, yang dapat ditentukan dengan beberapa metode, salah satunya adalah penggunaan syarat batas fungsi gelombang [5]. Selain itu, metode lain yang dapat digunakan adalah prinsip variasi.

Prinsip variasi adalah salah satu cara untuk menemukan pendekatan keadaan eigen energi terendah atau energi keadaan dasar. Ide dasar dari metode ini adalah nilai ekspekstasi dari operator Hamiltonian yang disebut energi rata-rata. Energi rata-rata ini harus lebih besar atau sama dengan keadaan energi terendah sistem. Karena energi terendah sebagai batas bawah dari nilai ekspektasi maka memungkinkan untuk memilih fungsi gelombang "coba" *(trial wave function)* yang mengandung sejumlah parameter dan meminimasi nilai ekspektasi Hamiltonian dengan metode variasi. Dasar metode variasi adalah memilih sebuah fungsi gelombang yang tergantung pada satu atau lebih parameter dan menemukan nilai-nilai parameter ini dengan nilai harapan energi serendah mungkin.

Pada kajian ini, peneliti akan mengaplikasikan metode variasi pada penentuan energi keadaan dasar helium muonik eksotis. Oleh karena itu, peneliti melakukan riset dengan judul "Penentuan Energi Keadaan Dasar Sistem Atom Helium Muonik Eksotis ($He^{2+}\mu^-\mu^-$) Menggunakan Prinsip Variasi"

DASAR TEORI

Sistem Atom Berelektron Banyak

Atom Helium merupakan sistem atom berelektron banyak yang paling sederhana, atom helium terdiri dari dua elektron yang mengorbit di sekitar inti. Operator hamiltonian untuk sistem atom helium ini yaitu [6]:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_2^2 - \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|r_{12}|} \qquad (1)$$

Apabila solusi persamaan Schrodinger untuk sistem ini adalah $\psi(r_1, r_2)$, maka persamaan nilai eigen dapat ditulis sebagai berikut:

$$H\psi(r_1, r_2) = E\psi(r_1, r_2) \qquad (2)$$

Dengan E energi total sistem.

Fungsi Gelombang Sistem 2 Elektron

Fungsi gelombang lengkap $\psi(1,2,3 \dots n)$ dari sistem n partikel dapat dinyatakan sebagai hasil kali fungsi gelombang ruang $\phi(1)$, $\phi(2)$, $\phi(3)$,…$\phi(n)$ dari masing-masing partikel dan fungsi spin setiap partikel. Jika terdapat sistem dengan 2 elektron maka fungsi gelombang sistem 2 elektron tersebut merupakan hasil kali fungsi gelombang ruang $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ yang merepresentasikan koordinat elektron dan fungsi spin $\chi(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$ yang merepresentasi orientasi spinnya.

$$\psi(1,2) = \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\chi(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$$

Dalam mencari solusi persamaan Schrodinger diasumsikan bahwa elektron dan inti atom tidak memiliki spin sehingga hanya memperhitungkan interaksi elektrostatis antar inti dengan elektron dan elektron dengan elektron yang dalam nantinya dalam kajian ini elektron tersebut digantikan dengan muon, sehingga didefinisikan suatu fungsi gelombang yang memberi representasi koordinat elektron.

$$\psi(1,2) = \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \qquad (3)$$

Yang dalam pendekatan orbital, Persamaan (3) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\psi(1,2) = \phi(\vec{r}_1)\phi(\vec{r}_2)$$

dimana $\phi(\vec{r}_1)$ merupakan fungsi gelombang yang merepresentasikan elektron 1 dan $\phi(\vec{r}_2)$ merupakan fungsi gelombang yang merepresentasikan elektron 2.

Pendekatan Orbital *(orbital approximation)*

Dalam mencari solusi persamaan Schrodinger pada Persamaan (2) di atas maka akan ditempuh suatu pendekatan yang dinamakan pendekatan orbital atau model elektron independen atom helium, dimana potensial interaksi antara kedua elektron diabaikan, artinya

$$V_{12} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} \equiv 0$$

Interaksi antar elektron baru pada akhirnya diperhitungkan sebagai suatu koreksi saja.

Pendekatan orbital ini merupakan pendekatan pertama dan yang paling sederhana dengan hamiltonian sistem atom helium dapat ditulis sebagai berikut:

$$H = T_1 + T_2 + V_1 + V_2$$

Fungsi gelombang untuk pendekatan orbital ini merupakan perkalian 2 fungsi gelombang atom hidrogen

$$\psi_0(r_1, r_2) \equiv \psi_{100}(r_1)\psi_{100}(r_2) = \frac{8}{\pi a^3} e^{-\frac{2(r_1+r_2)}{a}}$$

dimana a merupakan jari-jari Bohr

Apabila elektron dalam keadaan dasar, artinya $n = 1$, maka energi total sistem atom helium merupakan penjumlahan 2 energi sistem atom hidrogen pada keadaan dasar

$$E = (-13{,}6\, Z^2) + (-13{,}6\, Z^2)\ eV$$

Dengan $Z = 2$, sehingga diperoleh

$$E = -108{,}8\ eV \quad (4)$$

Sedangkan pengamatan menunjukkan bahwa untuk tingkat dasarnya energi total helium adalah:

$$E = -78{,}98\ eV \quad (5)$$

Hal ini disebabkan karena suku interaksi elektron-elektron diabaikan.

Potensial interaksi antar elektron

Berdasarkan pendekatan orbital tetapi dimana V_{12} diperhitungkan sebagai koreksi, andaikan bahwa V_{12} hanya memberi kontribusi kecil terhadap H, maka V_{12} dapat dianggap sebagai gangguan saja yang tidak banyak mengubah $\psi(r_1, r_2)$ sehingga V_{12} dapat ditentukan melalui penggunaan $\psi(r_1, r_2)$ sebagai berikut:

$$\langle V_{12} \rangle = \iint \psi^*(r_1, r_2) \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} \psi(r_1, r_2) d^3r_1\, d^3r_2 \quad (6)$$

Untuk menyelesaikan V_{12} pada Persamaan (6) dapat dimulai dengan pengintegralan terhadap r_2 terlebih dahulu sehingga untuk tujuan ini, r_1 dianggap konstan. r_{12} dapat dievaluasi dengan menggunakan rumus cosinus

$$|r_{12}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2} \quad (7)$$

Dengan memasukkan Persamaan (7) ke Persamaan (6) maka diperoleh

$$\langle V_{12} \rangle = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\left(\frac{8}{\pi a^3}\right)^2 \left(\int e^{-\frac{4r_1}{a}} d^3r_1\right)$$

$$\int_{r_2=0}^{\infty} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\varphi_2=0}^{2\pi} \frac{e^{-\frac{4r_2}{a}}\ r_2 \sin\theta_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2}}$$

$$d\varphi_2\, d\theta_2\, dr_2 \quad (8)$$

hasil integral terhadap φ_2 ialah 2π, sedangkan hasil integral terhadap θ_2 ialah sebagai berikut:

$$\int_{\pi}^{0} \frac{\sin\theta_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2,}} d\theta_2$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2}}{r_1 r_2}}\Bigg|_0^{\pi}$$

dengan memasukkan nilai batas, maka diperoleh

$$= \frac{1}{r_1 r_2}[(r_1 + r_2) - |r_1 - r_2|]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{r_1}, jika\ r_2 < r_1, \\ \dfrac{2}{r_2}, jika\ r_2 > r_1, \end{cases} \quad (9)$$

hasil yang diperoleh pada Persamaan (9) dimasukkan ke Persamaan (8) sehingga diperoleh

$$\langle V_{12} \rangle = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\left(\frac{8}{\pi a^3}\right)^2 \left(\int e^{-\frac{4r_1}{a}} d^3r_1\right)$$

$$\left(\frac{\pi a^3}{8r_1}\left[1 - \left(1 + \frac{2r_1}{a}\right) e^{-\frac{4r_1}{a}}\right]\right) \quad (10)$$

Persamaan (10) diintegralkan terhadap r_1 yang semula dianggap konstan

$$\langle V_{12}\rangle = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\left(\frac{8}{\pi a^3}\right)$$
$$\int \left[1-\left(1+\frac{2r_1}{a}\right)e^{-\frac{4r_2}{a}}\right]$$
$$e^{-\frac{4r_2}{a}}\, \mathrm{r}_1 \sin\theta_1 dr_1 d\theta_1 d\varphi_1$$

hasil dari integral θ_1 dan ϕ_1 ialah 4π, dan hasil dari integral r_1 ialah

$$\int_0^\infty \left[r_1\, e^{-4r_1/a} - \left(r_1 + \frac{2r_1^2}{a}\right)e^{-8r_1/a}\right]dr_1$$
$$= \frac{5a^2}{128} \qquad (11)$$

dengan memasukkan Persamaan (11) ke Persamaan (10), diperoleh nilai potensial interaksi antar elektron

$$\langle V_{12}\rangle = \frac{5}{4a}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right) = -\frac{5}{2}E_1$$
$$= 34\ eV \qquad (12)$$

Nilai potensial interaksi ini kemudian dijumlahkan dengan nilai energi total pada Persamaan (4) yang diperoleh dengan metode pendekatan orbital, sehingga diperoleh energi total pada keadaan dasar untuk sistem atom helium

$$\langle H\rangle = -108{,}8\ eV + 34 eV$$
$$= -74{,}8\ eV \qquad (13)$$

Persamaan (13) merupakan energi total yang diperoleh dengan memperhitungkan suku interaksi antar kedua elektron, nilai ini tidak memenuhi nilai energi keadaan dasar atom helium secara eksperimen yang ditunjukkan pada Persamaan (5), sehingga Griffiths dalam bukunya menyarankan untuk mengunakan fungsi gelombang coba berikut:

$$\psi_1(r_1, r_2) \equiv \frac{Z^3}{\pi a^3} e^{-\frac{Z(r_1+r_2)}{a}} \qquad (14)$$

dimana Z sebagai sebuah parameter variasional dan a sebagai jari-jari Bohr.

Mendapatkan nilai energi total berdasarkan prinsip Variasi

Fungsi gelombang pada Persamaan (14) merupakan fungsi eigen dari Hamiltonian tak terganggu dengan 2 sebagai pengganti Z didalam suku potensial Coulomb, sehingga Hamiltonian pada Persamaan (1) dapat ditulis kembali sebagai berikut (Grifiths, 1994):

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Z}{r_1} + \frac{Z}{r_2}\right)$$
$$+ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(Z-2)}{r_1} + \frac{(Z-2)}{r_2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{|r_1 - r_2|}\right)$$

Nilai ekspektasi H dapat ditunjukan oleh persamaan berikut:

$$\langle H\rangle = 2Z^2E_1 + 2(Z-2)$$
$$\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\langle\frac{1}{r}\rangle + \langle V_{12}\rangle \qquad (15)$$

Dimana $\langle 1/r\rangle$ adalah nilai ekspektasi dari $1/r$ dalam keadaan dasar atom hidrogenik (untuk kasus 1 partikel) ψ_{100}, harga ekspektasi dari $1/r$ adalah

$$\langle\frac{1}{r}\rangle = \frac{Z}{a} \qquad (16)$$

Nilai ekspektasi dari V_{12} telah dihitung pada sub bab sebelumnya yaitu pada Persamaan (12)

$$\langle V_{12}\rangle = \frac{5Z}{8a}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right) = -\frac{5Z}{4}E_1 \qquad (17)$$

Dengan mensubtitusikan Persamaan (17) dan (16) ke Persamaan (15) maka diperoleh:

$$\langle H\rangle = \left[2Z^2 - 4Z(Z-2) - \left(\frac{5}{4}\right)Z\right]E_1$$
$$= \left[-2Z^2 + \left(\frac{27}{4}\right)Z\right]E_1 \qquad (18)$$

Menurut prinsip variasional, kuantitas $\langle H\rangle$ ini, besarnya bisa melebihi ataupun minimal sama dengan nilai Eg untuk setiap nilai Z. Nilai teratas dari keadaan terikat terendah ketika H diminimumkan adalah

$$\frac{d}{dZ}\langle H\rangle = \left[-4Z + (\frac{27}{4})\right]E_1 \qquad (19)$$

Dari Persamaan (18), didapatkan

$$Z = \frac{27}{16} = 1{,}69 \qquad (20)$$

Nilai Z yang diperoleh pada Persamaan (20) dimasukkan ke Persamaan (18), sehingga diperoleh

$$\langle H\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^6 E_1 = -77.5\ eV \qquad (21)$$

Persamaan (21) merupakan nilai energi keadaan dasar sistem atom helium yang mendekati nilai energi keadaan dasar atom helium secara eksperimen [6]

Prinsip Variasi

Anggap terdapat kumpulan keadaan (state) $|\psi_k\rangle$ yang memenuhi persamaan berikut dan memiliki energi keadaan dasar E_0 [7]

$$H|\psi_k\rangle = E_k|\psi_k\rangle \qquad (22)$$

Dari Persamaan (22), dapat ditentukan bentuk fungsional dari $|\psi_0\rangle$, yang sering disebut fungsi gelombang coba (*trial wave function*)$|\Psi\rangle$.

Jika$|\Psi\rangle$ memenuhi syarat-syarat batas yang sama dengan$|\psi_k\rangle$, maka dapat ditulis

$$|\Psi\rangle = \sum_k c_k|\psi_k\rangle$$

$$\langle\psi_k|\psi_k\rangle = \delta_{kk\prime} \qquad (23)$$

Anggap kumpulan keadaan ini komplit (complete set) dalam suatu limit yang jelas (well-defined limit). Maka dapat ditentukan nilai ekspektasi ternormalisasi dari H (Rayleigh Quotient). Anggap $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ sehingga $\sum_n c_n c_n^* = 1$ yang dapat diperoleh dengan menormalisasi koefisien

$$\varepsilon = \frac{\langle\Psi|H|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle}$$

$$\varepsilon - E_0 = \sum_{nn'} c_n c_{n'}^* \langle\psi_n|\widehat{H} - E_0|\psi_{n'}\rangle$$

$$\varepsilon - E_0 = \sum_n c_n c_n^* (E_n - E_0) \qquad (24)$$

Dari Persamaan (24), diperoleh $\varepsilon \geq 0$ karena E_0 adalah energi keadaan dasar, sehingga dapat disimpulkan bahwa $\varepsilon - E_0 \geq 0$ maka ε selalu merupakan batas atas E_0 [7].

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian teoritis yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji. Dalam melakukan kajian ini akan dilakukan beberapa hal berikut :

1. Memvisualisasikan sistem muonik helium eksotis $He^{2+}\mu^-\mu^-$.
2. Menentukan fungsi gelombang coba menggunakan *orbital approximation*.
3. Menormalisasikan fungsi gelombang coba-coba ini.
4. Menentukan Hamiltonian sistem (dengan mengabaikan efek spin dan koreksi relativistik) menggunakan pendekatan Born-Oppenheimer.
5. Meminimumkan nilai ekspektasi Hamiltonian yang telah diperoleh pada langkah ke-4 untuk mendapatkan bentuk eksplisit dari *parameter variasi.*
6. Menentukan nilai energi rata-rata helium muonik eksotis ($He^{2+}\mu^-\mu^-$) dengan menggunakan prinsip variasi.
7. Membandingkan dengan energi keadaan dasar helium (He) dan ($He^{2+}\mu^-e^-$)
8. Menginterpretasi hasil perbandingan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sistem atom dalam kajian ini merupakan sistem atom helium muonik eksotis ($He^{2+}\mu^-\mu^-$), yang terdiri dari sebuah inti atom helium dan 2 buah muon negatif. Jika pada sistem atom helium (He) terdapat 2 buah elektron yang mengitari inti, maka pada sistem ini kedua elektron tersebut digantikan oleh muon yang massanya $\cong 207$ massa elektron. Dengan massa tereduksi sebesar

$$\mu \approx 207\, m_e$$

Dan jari-jari Bohr termodifikasi $a_{\mu^-,\alpha}$

$$a_{\mu^-,\alpha} \cong \frac{a_0}{414} \qquad (25)$$

Penentuan energi keadaan dasar sistem helium muonik eksotis ($He^{2+}\mu^-\mu^-$) dalam kajian ini menggunakan metode pendekatan prinsip variasi yang mana penentuan energi keadaan dasar ini didasari oleh teorema berikut [6] :

$$E_g \leq \langle\psi|H|\psi\rangle = \langle H\rangle$$

Nilai ekspektasi Hamiltonian yang bergantung pada pilihan ψ merupakan nilai energi keadaan dasar yang tidak lebih kecil dari nilai eigen energi terendah E_g.

Fungsi Gelombang Coba Keadaan Dasar Sistem Atom Helium Muonik Eksotis ($He^{2+}\mu^-\mu^-$)

Berdasarkan metode pendekatan orbital, maka penulis memilih fungsi gelombang ion hidrogenik pada keadaan dasar ($n = 1, l = 0, m = 0$) sebagai fungsi gelombang coba. Fungsi ini memberi representasi untuk sistem dalam kajian ini, namun perlu diingat bahwa sistem ini merupakan sistem atom muonik sehingga radius Bohr pada fungsi gelombang tersebut diganti dengan radius Bohr termodifikasi. Oleh karena itu fungsi gelombang coba yang dipilih adalah

$$\phi(\vec{r}_1) = \phi(r_1) = Ne^{-\frac{\delta r_1}{a_{\mu^-,\alpha}}} \qquad (26)$$

dan

$$\phi(\vec{r}_2) = \phi(r_2) = Ne^{-\frac{\delta r_2}{a_{\mu^-,\alpha}}} \qquad (27)$$

dimana N merupakan konstanta normalisasi fungsi gelombang coba, $\phi(r_1)$ dan $\phi(r_2)$ merupakan fungsi gelombang coba yang merepresentasikan muon 1 dan muon 2, δ merupakan parameter variasi, $a_{\mu^-,\alpha}$ merupakan radius Bohr termodifikasi, r_1 dan r_2 merupakan jarak muon 1 dan muon 2 terhadap inti atom.

Nilai N pada Persamaan (26) dan (27) dapat ditentukan dengan menggunakan syarat normalisasi fungsi gelombang, sehingga diperoleh

$$\phi(r_1) = \left(\frac{\delta^3}{\pi {a_{\mu^-,\alpha}}^3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\delta r_1}{a_{\mu^-,\alpha}}} \qquad (28)$$

$$\phi(r_2) = \left(\frac{\delta^3}{\pi {a_{\mu^-,\alpha}}^3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\delta r_2}{a_{\mu^-,\alpha}}} \qquad (29)$$

Untuk menyederhanakan perhitungan, maka dapat dimisalkan $\lambda = \delta / a_{\mu^-,\alpha}$, dimana δ merupakan parameter variasi, sehingga Persamaan (28) dan Persamaan (29) dapat disederhanakan menjadi

$$\phi(r_1) = \left(\frac{\lambda^3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda r_1} \qquad (30)$$

dan

$$\phi(r_2) = \left(\frac{\lambda^3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda r_2} \qquad (31)$$

Hamiltonian Sistem Atom Helium Muonik Eksotis.

Berdasarkan pendekatan Born-Oppenheimer Hamiltonian sistem ini dapat ditulis sebagai berikut:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_2^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Z}{r_1} + \frac{Z}{r_2} - \frac{1}{r_{12}}\right) \qquad (32)$$

Dimana pada Persamaan (32), suku pertama merupakan operator energi kinetik muon pertama, suku kedua merupakan operator energi kinetik muon kedua, suku ketiga merupakan operator energi potensial muon pertama dengan inti helium, suku keempat merupakan operator energi potensial muon kedua dengan inti helium dan suku kelima merupakan energi potensial tolak menolak sebagai akibat adanya interaksi antar kedua muon.

Untuk penyederhanaan perhitungan digunakan satuan atom Hartree, sehingga Persamaan (32) diatas dapat ditulis sebagai berikut:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\nabla_1^2 - \frac{1}{2}\nabla_2^2 - \frac{Z}{r_1} - \frac{Z}{r_2} + \frac{1}{r_{12}}$$

Ide dasar dari prinsip variasi adalah menentukan nilai ekpektasi dari operator energi H (Hamiltonian) yang disebut energi rata-rata yang nilainya sama atau lebih besar dari E_g dan memilih sebuah fungsi gelombang coba yang mengandung parameter variasi, seperti yang telah dijelaskan pada langkah sebelumnya. Nilai ekspektasi Hamiltonian ini dapat ditulis dalam notasi Dirac:

$$\langle H \rangle = \left\langle \psi \middle| -\frac{1}{2}\nabla_1^2 - \frac{1}{2}\nabla_2^2 - \frac{Z}{r_1} - \frac{Z}{r_2} + \frac{1}{r_{12}} \middle| \psi \right\rangle \quad (33$$

Untuk memudahkan analisis, maka persamaan (33) akan dibagi menjadi 5 bagian dan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\langle H \rangle = \langle \psi | T_1 + T_2 + V_1 + V_2 + V_{12} | \psi \rangle$$

$$\langle H \rangle = \langle \psi | T_1 | \psi \rangle + \langle \psi | T_2 | \psi \rangle + \langle \psi | V_1 | \psi \rangle + \langle \psi | V_2 | \psi \rangle + \langle \psi | V_{12} | \psi \rangle) \qquad (34)$$

Dimana T_1 mewakili operator energi kinetik muon 1, T_2 mewakili operator energi kinetik muon 2, V_1 mewakili operator energi potensial muon 1 dengan inti atom, V_2 mewakili operator energi potensial muon 2 dengan inti atom dan V_{12} mewakili operator energi potensial interaksi antar kedua muon.

Dengan menggunakan fungsi gelombang coba pada Persamaan (30) dan Persamaan (31), maka nilai ekpektasi dari Hamiltonian sistem ini yang terdiri dari nilai ekspektasi energi kinetik muon 1, nilai ekpektasi energi kinetik muon 2, nilai ekpektasi energi potensial muon 1 terhadap inti atom helium, nilai ekspektasi energi potensial muon 2 terhadap inti atom helium dan nilai ekpektasi energi potensial interaksi antar kedua muon dapat dievaluasi dan menghasilkan nilai secara berturut-turut ialah

$$\frac{1}{2}\lambda^2, \frac{1}{2}\lambda^2, -\lambda Z, -\lambda Z \; dan \; \frac{5}{8}\lambda \qquad (35)$$

Dimana pada Persamaan (35), setiap nilai ekspektasi merupakan fungsi λ yang didalamnya mengandung parameter variasi.

Aplikasi prinsip variasi untuk memperoleh energi keadaan dasar.

Menentukan parameter variasi ($\boldsymbol{\delta}$)

Dengan memasukkan nilai-nilai ekspektasi yang telah diperoleh pada Persamaan (35) ke Persamaan (), maka didapatkan

$$\langle H\rangle = \lambda^2 - 2\lambda Z + \frac{5}{8}\lambda \qquad (36)$$

Pada Persamaan (36), variabel λ dapat dikembalikan ke bentuk awal dimana $\lambda = \frac{\delta}{a_{\mu^-,\alpha}}$, sehingga diperoleh

$$\langle H\rangle = \frac{\delta^2}{a_{\mu^-,\alpha}^2} - 2Z\frac{\delta}{a_{\mu^-,\alpha}} + \frac{5}{8}\frac{\delta}{a_{\mu^-,\alpha}} \quad (37)$$

Langkah selanjutnya dari perhitungan ini ialah meminimalkan fungsi $\langle H\rangle$ terhadap parameter variasi (δ), dengan syarat $\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial\delta} = 0$ sehingga, diperoleh

$$\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial\delta} = \frac{2\delta}{a_{\mu^-,\alpha}^2} - \frac{2Z}{a_{\mu^-,\alpha}} + \frac{5}{8a_{\mu^-,\alpha}} = 0$$

$$\delta = \left(Z - \frac{5}{16}\right)a_{\mu^-,\alpha} \qquad (38)$$

Persamaan (38) merupakan parameter variasi yang akan menghasilkan energi terendah.

Menentukan $\langle \boldsymbol{H}\rangle$ untuk keadaan dasar.

Dengan memasukkan nilai parameter variasi δ dari Persamaan (38) ke Persamaan (37), maka diperoleh:

$$\langle H\rangle = \frac{\left(\left(Z - \frac{5}{16}\right)a_{\mu^-,\alpha}\right)^2}{a_{\mu^-,\alpha}^2} - \frac{2Z\left(Z - \frac{5}{16}\right)a_{\mu^-,\alpha}}{a_{\mu^-,\alpha}} + \frac{5\left(Z - \frac{5}{16}\right)a_{\mu^-,\alpha}}{8a_{\mu^-,\alpha}}$$

$$\langle H\rangle = \left(-Z^2 + \frac{5}{8}Z - \frac{25}{256}\right)(a.u)_{\mu^-} \quad (39)$$

Dengan mengganti nilai Z pada Persamaan (39) dengan 2 yang merupakan nomor atom helium dan sekaligus mengindikasikan jumlah proton dalam inti atom helium, maka diperoleh:

$$\langle H\rangle = -2{,}8476\ (a.u)_{\mu^-} \qquad (40)$$

dimana

$$1\ (a.u)_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0} = \frac{\alpha\hbar c}{a_0} \qquad (41)$$

Dalam konteks ini diketahui bahwa $1(a.u)_e \propto \frac{1}{a_0}$, sedangkan untuk kajian ini digunakan satuan atom untuk sistem helium muonik eksotis ($He^{2+}\mu^-\mu^-$) yaitu dengan mengganti radius Bohr pada persamaan (41) dengan radius Bohr termodifikasi pada Persamaan (25)

$$a_{\mu^-,\alpha} \approx \frac{a_0}{414}$$

Sehingga,

$$1\ (a.u)_{\mu^-} \propto \frac{1}{a_{\mu^-,\alpha}}$$

$$1(\,a.u\,)_{\mu^-} \approx 414\ (a.u)_e \qquad (42)$$

Maka Persamaan (40) menjadi

$$\langle H\rangle = -2{,}8476\ (414)\ (a.u)_e$$

$$\langle H\rangle = -1178{,}9\ (a.u)_e$$

Satuan energi sistem atomik memiliki hubungan dengan eV yang didefinisikan sebagai:

$$1\ (a.u)_e = 1\ \text{Hartree} = 27{,}2\ eV$$

Oleh karena itu nilai energi keadaan dasar untuk sistem ini diberikan oleh:

$$\langle H\rangle = -32066{,}08\ eV \qquad (43)$$

Persamaan (43) menunjukkan bahwa untuk melepaskan 2 muon dari sistem dibutuhkan energi minimum berkisar $-32\ KeV$.

Tabel 1 merupakan hasil perhitungan energi total untuk sistem atom helium (He), sistem atom helium muonik ($He^{2+}\mu^-e^-$) dan sistem atom helium muonik eksotis ($He^{2+}\mu^-\mu^-$). Perhitungan energi total untuk untuk sistem atom helium (He) telah dikaji oleh Thakkar dan Koga (1994) yang menunjukkan nilai energi total sistem pada keadaan dasarnya adalah $-2{,}903\ (a.u)_e$ yang bersesuaian dengan hasil eksperimen atau setara dengan $-78{,}8\ eV$, sedangkan untuk sistem atom helium muonik ($He^{2+}\mu^-e^-$) yang terdiri dari sebuah inti atom helium, 1 elektron dan 1 muon, telah dikaji oleh Rezaie (2010) dengan menggunakan syarat-syarat batas fungsi gelombang dan didapati nilai energi total minimum sistem ini ialah $-402{,}6\ (a.u)_e$ atau $-10{,}9\ KeV$. Selanjutnya untuk sistem atom helium muonik eksotis ($He^{2+}\mu^-\mu^-$) yang terdiri dari sebuah inti atom helium dan 2 buah muon, telah dikaji juga oleh Eskandari dan Rezaie (2004) dengan menggunakan syarat-

syarat batas fungsi gelombang dengan nilai energi total yang diperoleh sebesar $-2{,}7251(a.u)_\mu$, $-2{,}7923(a.u)_\mu$ dan $-2{,}8206\ (a.u)_\mu$, energi keadaan dasar ini jika dikonversi ke satuan atom elektron $(a.u)_e$ maka secara berturut-turut diperoleh $-1128{,}1\ (a.u)_e$, $-1156{,}01\ (a.u)_e$ dan $-1167{,}7\ (a.u)_e$atau sekitar $-30{,}1\ KeV$, $-31{,}4\ keV$ dan $-31{,}7\ KeV$ secara berturut-turut. Hasil perhitungan Eskandari dan Rezaie tidak memberikan hasil berbeda jauh dengan perhitungan nilai energi total sistem atom helium muonik eksotis $(He^{2+}\mu^-\mu^-)$ yang dikaji oleh penulis, dimana energi total keadaan dasar sistem yang diperoleh dalam kajian ini ialah $-2{,}8476\ (a.u)_\mu$, jika dalam satuan massa elektron $(a.u)_e$ nilai ini setara dengan $1178{,}9\ (a.u)_e$ atau sekitar $-32{,}1\ KeV$.

Perbandingan energi keadaan dasar sistem atom helium (He), $(He^{2+}\mu^-e^-)$ dan $(He^{2+}\mu^-\mu^-)$

Perbandingan energi keadaan dasar untuk ketiga sistem ini dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Perbandingan Energi Keadaan Dasar untuk Sistem Atom Helium (He), Helium Muonik $(He^{2+}\ \mu^-e^-)$, dan Helium Muonik Eksotis $(He^{2+}\ \mu^-\mu^-)$.

No	Sistem	Energi keadaan dasar				Referensi
		Teori			Eksperimen	
		$(a.u)_e$	$(a.u)_\mu$	eV	eV	
1	(He)	$-2{,}903^a$	-	$-78{,}9$	$-78{,}8^b$	a [8] b [6]
2	$(He^{2+}\mu^-e^-)$	$-402{,}6^c$	-	$-10950{,}7$	-	c [9]
3	$(He^{2+}\mu^-\mu^-)$	$-1128{,}1$	$-2{,}7251^d$	$-30686{,}7$	-	d[5]
		$-1156{,}01$	$-2{,}7923^d$	$-31443{,}4$	-	
		$-1167{,}7$	$-2{,}8206^d$	$-31761{,}9$	-	
4	$(He^{2+}\mu^-\mu^-)$	$-1178{,}9$	$-2{,}8476$	$-32066{,}08$	-	Penulis

Berdasarkan perbandingan energi keadaan dasar untuk sistem atom helium (He), helium muonik $(He^{2+}\mu^-e^-)$ dan helium muonik eksotis $(He^{2+}\mu^-\mu^-)$ pada Tabel 4.1 didapati bahwa nilai energi total pada keadaan dasarnya untuk sistem atom helium muonik eksotis $(He^{2+}\mu^-\mu^-)$ lebih besar dibandingkan dengan kedua sistem lainnya, dimana untuk melepaskan 2 muon dari sistem tersebut dibutuhkan energi sekitar $-32{,}1\ KeV$, energi yang dibutuhkan ini jauh lebih besar dari energi yang dibutuhkan untuk melepaskan 1 muon dan 1 elektron pada sistem atom helium muonik$(He^{2+}\mu^-e^-)$ dan 2 elektron pada sistem atom helium (He) . Hal ini dipengaruhi oleh besarnya massa kedua kedua partikel yang terikat pada inti atom, dimana muon pada sistem atom helium muonik eksotis $(He^{2+}\mu^-\mu^-)$ memiliki massa yang besarnya sekitar $207\ m_e$. Selain itu, muon yang memiliki massa lebih besar dari elektron tersebut akan berada pada jarak yang lebih dekat ke inti dibandingkan dengan elektron sehingga untuk melepaskannya dibutuhkan energi yang lebih besar.

KESIMPULAN

Berdasarkan kajian teoritik yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan:

1. Berdasarkan pendekatan orbital *(orbital approximation)* maka fungsi gelombang coba ternormalisasi untuk sistem atom helium muonik eksotis $(He^{2+}\mu^-\mu^-)$ merupakan fungsi gelombang atom hidrogen pada keadaan dasar yaitu sebagai berikut:

$$\phi(r_1) = \left(\frac{\delta^3}{\pi a^3_{\mu^-,\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\delta r_1}{a_{\mu^-,\alpha}}}$$

dan

$$\phi(r_2) = \left(\frac{\delta^3}{\pi a^3_{\mu^-,\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\delta r_2}{a_{\mu^-,\alpha}}}$$

2. Berdasarkan pendekatan Born-Oppenheimer maka operator Hamiltonian untuk sistem atom helium muonik eksotis $(He^{2+}\mu^-\mu^-)$ ialah sebagai berikut terdiri dari operator energi kinetik muon 1, operator energi kinetik muon 2, operator energi potensial muon 1 terhadap inti atom helium, operator energi potensial muon 2 terhadap inti atom helium dan operator energi potensial interaksi antar kedua muon.

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_2^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Z}{r_1} + \frac{Z}{r_2} - \frac{1}{r_{12}}\right)$$

3. Energi total keadaan dasar sistem atom helium muonik eksotis $(He^{2+}\mu^-\mu^-)$ yang diperoleh menggunakan pendekatan prinsip variasi ialah $-32066{,}08\, eV$ artinya bahwa untuk melepaskan 2 muon dari sistem ini dibutuhkan energi sebesar $32{,}1\, KeV$
4. Nilai energi total pada keadaan dasar sistem atom helium muonik eksotis $(He^{2+}\mu^-\mu^-)$ lebih besar dibandingkan dengan energi total pada keadaan dasar sistem atom helium (He) dan energi total sistem atom helium muonik $(He^{2+}\mu^-e^-)$. Hal ini disebabkan oleh perbedaan massa tereduksi sistem-sistem ini dalam pendekatan orbital.

Saran

Pada penelitian ini hanya memperhitungkan interaksi antar inti dengan muon dan muon dengan muon, sedangkan efek spin inti dan spin muon diabaikan. Oleh karena itu dibutuhkan penelitian lebih lanjut dengan menambahkan berbagai koreksi kedalam perhitungan seperti struktur halus yang dihasilkan oleh efek relativistik dan spin muon, pergeseran Lamb dan struktur hiperhalus yang diakibatkan oleh efek spin inti.

DAFTAR PUSTAKA

1. Hardhienata, H. 2014. *Tutorial mekanika Kuantum.* Austria: Johanes Kepler University
2. Besier, A. 1987. *Konsep Fisika Modern*. Jakarta : Penerbit Erlangga.
3. Putlitz, zu Gisbert. 1992. Opening of the symposium “The Future of Muon physics” *Z-Phys. C-Particle and Fields*, Vol 56, S3-S4.
4. Krutov, A.A. dan A, P. Martynenko. 2008. Ground state Hyperfine structure of muonic helium atom.” *Physics of fundamental interactions*”, Moscow.
5. Eskandari, M. R, dan B. Rezaie. 2004. Calculation of the Ground-State Energy and Studies of Other Properties of Exotic Helium Atoms With the Use of Boundary Conditions of Wave Function. *Internasional Jurnal of Quantum Chemistry*,Vol 101, 320-324.
6. Griffiths, D. 1994. *Introduction to Quantum Mechanics*. USA: Pretince Hall.Inc
7. Pingak, R. 2015. *Bahan Ajar Fisika Kuantum*. Kupang: Universitas Nusa Cendana
8. Thakkar A.J dan T. Koga. 1994. Ground state energies for the helium isoelectronic series. *Physical review* A, Vol 50,854-856
9. Rezaie, B. 2010. Calculation of Energy and Other Properties of Muonic Helium Atom Using Boundary Conditions of wave function. *Commun. Theor. Physic.* Vol 54,518-520.