Vol. 7, No. 1 – April 2022
ISSN: 2503-5274(p), 2657-1900(e)

Jurnal Fisika
Fisika Sains dan Aplikasinya

SOLUSI PERSAMAAN MEDAN GRAVITASI EINSTEIN SIMETRI BOLA STATIS DENGAN SUMBER FLUIDA IDEAL

Muh. Fachrul Latief, Idawati Supu
Jurusan Fisika,Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Gorontalo,
Jl. Prof. Dr. Ing. B.J. Habibie, Tilongkabila, Kab. Bone Bolango, Gorontalo, 96554, Indonesia
E-mail: idawatisupu@ung.ac.id

Abstrak

Dalam studi ini telah ditelaah kembali solusi dari metrik Tolman, di mana tensor energi momentum yang digunakan untuk menyelesaikan solusi persamaan medan Einstein simetri bola untuk keadaan statis adalah persamaan fluida ideal dengan kasus persamaan geodesik pada koordinat bergerak (co-moving coordinate). Beberapa hal yang ditelaah mulai dari perumusan Metrik Tolman, perumusan Persamaan Medan Einstein dan solusinya, serta Solusi dari medan gravitasi untuk fluida yang tidak dimampatkan. Solusi yang ditelaah memberikan pendekatan bagaiamana sebuah materi yang masif mengalami keruntuhan fluida pada syarat interior dan eksterior dari metrik Schwarzschildnya.

Kata kunci*: Metrik Tolman; tensor energi-momentum; persamaan Medan Einstein, medan gravitasi, metrik Schwarzschild.*

Abstract

This study has been reviewed about the solution of the Tolman metric, where the momentum-energy tensor used to solve the solution of the spherical symmetric Einstein field equation for the static state which is an ideal fluid equation in the case of the geodesic equation in co-moving coordinates. Some of the things that were studied started from formulation of the Tolman Metric, formulation of the Einstein Field Equation and its solution, and solution of the gravitational field for an incompressible fluid. The solution under study provides an approximation of how a massive material undergoes fluid collapse on the interior and exterior terms of its Schwarzschild metric.

Keywords*: Tolman Metric; energy-momentum tensor; Einstein field equation; gravity field; Schwarzschild metric.*

PENDAHULUAN

Solusi Schwarzschild merupakan solusi vakum dari persamaan medan gravitasi Einstein simteri bola dan statis. Solusi ini mampu menjelaskan medan gravitasi yang berada di luar sebuah bola yang bermassa, dengan asumsi bahwa muatan listrik dan momentum sudut bermassa dan konstanta kosmologi bernilai nol. Selain itu, solusi Schwarzschild telah terbukti memainkan kepentingan yang paling mendasar dalam konsep-konsep relativitas umum dan dinamika lainnya seperti fenomena cakrawala peristiwa (*event horizon*), singularitas ruang-waktu serta beberapa aspek yang berkaitan dengan teori medan kuantum dalam ruang-waktu melengkung. Solusi inilah yang memberi wawasan pertama mengenai fenomena keruntuhan gravitasi [1] dan menginspirasi konstruksi dari model teoritik tentang bintang relativistik lainnya [2,3].

Pada pertengahan tahun 1960, objek yang dikenal sebagai lubang hitam diakibatkan adanya bintang yang runtuh atau yang dikenal sebagai keruntuhan gravitasi [4] atau disebut juga sebagai bintang beku [5]. Baru pada tahun 1965 yang menandai era di mana para peneliti intensif pada topik lubang hitam. Oleh karena itu, uji eksperimental solusi Schwarzschild, geometri eksterior telah sangat berhasil memberikan makna fisis seperti presisi perihelion Merkurius, fenomena pembelokan cahaya di mana medan gravitasi Schwarzschild eksterior bertindak sebagai lensa gravitasi. Selain itu, sangat menarik untuk melihat efek kopling Chern-Simons dalam gangguan di sekitar ruang-waktu Schwarzschild. Gangguan linier dari ruang-waktu Schwarzschild dalam teori ini dijelaskan dalam [6,7,8], dan gelombang gravitasi dari partikel yang mengorbit pada lintasannya dibahas dalam [9]. Ada beberapa topik khusus tentang lubang hitam yang berputar secara peralahan [6,10,11,12], tetapi sangat sulit untuk menemukan solusi yang tepat dari lubang hitam yang berputar tersebut.

Selain solusi Schwarzschild, terdapat juga solusi Reissner-Nordstrom yang menjelaskan solusi statik dari perpaduan medan elektromagnet dan medan gravitasi, di mana geometri ruang-waktu di sekitar massa yang bermuatan listrik simetri bola [13,14]. Dengan kata lain, kelengkungan ruang-waktu diakibatkan karena adanya distribusi massa dari medan elektromagnet. Zhang, telah menyelesaikan solusi persamaan medan Einstein dengan kehadiran medan skalar [14].

Dalam paper ini telah dikaji kembali solusi persamaan medan Einstein dengan distribusi materi fluida ideal yang telah dijelaskan oleh Ricard C. Tolman [15]. Pada tahun 2021, Matondo dan Maharaj telah mengkombinasikan medan listrik dan metrik Tolman untuk menyelesaikan persamaan medan Einstein-Maxwell [16]. Namun telaah kali ini lebih ke kajian solusi medan garvitasi eksterior dan interior untuk metrik Schwarzschild. Dan telaah tentang medan gravitasi untuk bola fluida yang tidak dimampatkan.

PERUMUSAN METRIK TOLMAN

Ansatz untuk metrik simetri bola secara umum diungkapkan

$$ds^2 = a\,dt^2 - b\,dr^2 - c\,d\Omega^2 \tag{1}$$

di mana $a, b,$ dan c merupakan fungsi dari koordinat t dan r. Sedangkan ungkapan untuk sudut azimuthnya adalah $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$.

Selanjutnya, metrik pada persamaan (1) dapat disederhanakan lebih lanjut melalui transformasi koordinat. Dengan asumsi bahwasanya lintasan partikel yang dideskripsikan oleh persamaan geodesik melalui koordinat yang bergerak (*comoving coordinate*), di mana lintasan partikel ini tidak berubah sepanjang geodesik tersebut. Oleh karenanya ungkapan vektor 4-kecepatan aliran dapat dituliskan menjadi

$$u^\alpha = (u^0, 0,0,0) \tag{2}$$

di mana $u^0 = \frac{dt}{ds} = dt'$.

Sekarang tinjau persamaan geodesik yang diungkapkan

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \tag{3}$$

Subtitusi persamaan (2) ke dalam persamaan (3), maka persamaan geodesik menjadi

$$\frac{dx^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{00}\,(u^0)^2 = 0 \tag{4}$$

Hal tersebut memberikan korelasi untuk ungkapan simbol Christoffel terhadap koordinat waktu $\Gamma^k_{00} = 0$ dengan $k = 0,1,2,3$. Dengan demikian, diperoleh juga turunan kovarian tensor metrik untuk koordinat waktunya juga akan bernilai nol ($\partial_k g_{00} = 0$). Hal ini memberikan analisis bahwasanya nilai untuk suku waktu $g_{00} = a$ dalam metrik tersebut yang merupakan fungsi dari koordinat rupa-waktu (*timelike*) itu sendiri.

Jika sekarang dibuat transformasi koordinat terhadap sumbu waktunya yang bentuknya

$$dt' = a^{1/2}dt \tag{5}$$

sedangkan untuk koordinat ruang tidak berubah, maka komponen tensor metrik kovarian dari persamaan (1) dapat ditulis kembali menjadi

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{6}$$

dan bentuk tensor metrik kontravariannya berbentuk

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix} \tag{7}$$

dengan koordinat $x^\alpha = (t, r, \theta, \phi)$. Dengan adanya perbandingan persamaan (1) terhadap tensor metrik kovarin dari koordinat rupa-waktunya, maka diperoleh relasi koefisien $a = 1$, $b = e^\mu$ dan $c = R^2$. Di mana μ dan R merupakan fungsi dari t dan r itu sendiri. Metik inilah yang biasa desbut sebagai metrik Tolman yang dituliskan

$$ds^2 = dt^2 - e^\mu(t,r)dr^2 - R^2(t,r)[d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2] \tag{8}$$

Bentuk metrik pada persamaan (8) menunjukkan bahwasanya luas bola pada $r = konstan$ yang diberikan oleh ungkapan $4\pi R^2$ dengan R harus memenuhi syarat

Jurnal Fisika
Fisika Sains dan Aplikasinya

$$R' = \frac{\partial R}{\partial r} > 0 \tag{9}$$

Dengan syarat tersebut, memberi kemungkinan bahwa $R' = 0$ pada titik r_0 harus dihilangkan karena memungkinkan garis-garis $r = konstan$ pada titik-titik sekitarnya r_0 dan $r_0 + dr$ akan bertepatan di titik r_0 sehingga menciptakan permukaan kaustik yang menyebabkan koordinat bergerak tidak dapat berlaku lagi.

Adanya persamaan geodesik terhadap komponen koordinat waktu (x^0) saja, memberikan implikasi dari persamaan (4) menjadi sebuah idenstitas, sedangkan koordinat ruang $r(x^1), \theta(x^2)$, dan $\phi(x^3)$ menjadi konstan di sepanjang persamaan geodesik tersebut. Dengan demikian diperoleh $ds = dx^0$ dan dituliskan menjadi

$$u^\alpha = u_\alpha = (1,0,0,0) \tag{10}$$

PERUMUSAN PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN

Solusai untuk persamaan medan Einstein diungkapkan oleh

$$R_{\mu\nu} = \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{11}$$

di mana $R_{\mu\nu}$ adalah tensor Ricci dari kelengkuang ruang-waktu, $T_{\mu\nu}$ adalah tensor enegi-momentum yang mendeskripsikan distribusi materi, dan $g_{\mu\nu}$ adalah tensor metrik kovarian dari elemen garis metrik Tolman. Dalam kasus ini, diasumsikan bahwasanya kelengkungan ruang-waktu diakibatkan karena adanya distribusi materi, dalam hal ini distribusi fluida ideal sederhana (tanpa adanya tekanan aliran) yang dideskripsikan oleh tensor energi-momentum, yakni

$$T_{\mu\nu} = \rho\, u_\mu u_\nu \tag{12}$$

dan $T = T_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$. Dengan menggunakan persamaan (10), maka diperoleh komponen $T_{\mu\nu}$ yang tidak bernilai nol adalah $T_{00} = T = \rho$. Untuk menyelesaikan solusi persamaan medan Einstein, maka diperlukan ungkapan simbol Chritoffel yang diungkapkan

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\right) \tag{13}$$

Komponen-komponen untuk simbol Christoffel yang tidak bernilai nol adalah

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2}\dot{\mu} && \Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}\, e^\mu\dot{\mu}\\
&\Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{03} = R^{-1}\dot{R} && \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\,\mu'\\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = R^{-1}R' && \Gamma^0_{22} = R\dot{R}\\
&\Gamma^3_{23} = \cot\theta && \Gamma^0_{33} = R\dot{R}\sin\theta\\
&\Gamma^1_{22} = -e^{-\mu}R\,R' && \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta\\
&\Gamma^1_{33} = -e^{-\mu}RR'\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{14}$$

di mana tanda *dots* $(\cdot)$ dan *primes* $(')$ merupakan turunan dari koordinat waktu (t) dan koordinat radius (r).

Selanjutnya, tensor Ricci dapat dihitung dengan menggunakan persamaan

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\,\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) - \partial_{\mu\nu}\left(\ln\sqrt{-g}\right) - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} \tag{15}$$

Sehingga komponen tensor Ricci yang tidak bernilai nol adalah

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{1}{2}\ddot{\mu} - \frac{1}{2}\ddot{R} - \frac{1}{4}\dot{\mu}^2\\
R_{01} &= \frac{1}{R}R'\dot{\mu} - \frac{2}{R}\dot{R}'\\
R_{11} &= e^\mu\left(\frac{1}{2}\ddot{\mu} + \frac{1}{4}\dot{\mu}^2 + \frac{1}{R}\dot{\mu}\,\dot{R}\right)\\
&\quad + \frac{1}{R}(\mu' R' - 2R'')\\
R_{22} &= R\ddot{R} + \frac{1}{2}R\dot{R}\dot{\mu} + \dot{R}^2 + 1\\
&\quad - e^{-\mu}\left(RR'' - \frac{1}{2}RR'\mu' + R'^2\right)
\end{aligned} \tag{16}$$

Dari komponen tensor Ricci yang ada, maka diperoleh skalar Ricci (R), yakni

$$\begin{aligned}
R &= g^{00}R_{00} + g^{01}R_{01} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}\\
R &= 2e^{-\mu}\left[\frac{2R''}{R} + \left(\frac{R'}{R}\right)^2 - \frac{R'\mu'}{R}\right] - \frac{2}{R}\dot{\mu}\dot{R}\\
&\quad -2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{2}{R^2} - 4\frac{\ddot{R}}{R} - \ddot{\mu} - \frac{1}{2}\dot{\mu}^2
\end{aligned} \tag{17}$$

Persamaan medan Einstein dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (11) dan menghasilkan tensor medan Einstein untuk komponen $00, 01, 22,$ dan khusus untuk komponen 33 tidak memberikan informasi yang baru karena distribusi materinya sama dengan komponen 22. Ungkapan dari tensor medan Einsteinnya diberikan oleh

$$-\ddot{\mu} - \frac{4}{R}\ddot{R} - \frac{1}{2}\dot{\mu}^2 = \kappa\rho \tag{18}$$

$$2\dot{R}' - R'\dot{\mu} = 0 \tag{19}$$

$$\ddot{\mu} + \frac{1}{2}\dot{\mu}^2 + \frac{2}{R}\,\dot{R}\dot{\mu} + \tag{20}$$

$$e^{-\mu}\left(\frac{2}{R}R'\mu' - \frac{4}{R}R''\right) = \kappa\rho \tag{21}$$

$$\frac{2}{R}\ddot{R} + 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{1}{R}\dot{R}\dot{\mu} + \frac{2}{R^2} \tag{22}$$

$$+e^{-\mu}\left[\frac{1}{R}R'\mu' - 2\left(\frac{R'}{R}\right) - \frac{2}{R}R''\right] = \kappa\rho$$

Untuk menyederhanakan keempat persamaan di atas, maka perlu mengeleminasi suku $\ddot{\mu}$ sehingga memberikan 3 bentuk persamaan medan dengan kombinasi yang tidak bergantung satu sama lain, diungkapkan oleh

$$e^{\mu}\left(2R\ddot{R}+\dot{R}^2+1\right)-R'^2=0 \tag{23}$$

$$2\dot{R}'-R'\dot{\mu}=0 \tag{24}$$

$$e^{-\mu}\left[\frac{1}{R}R'\mu'-\left(\frac{R'}{R}\right)^2-\frac{2}{R}R''\right]+\frac{1}{R}\dot{R}\dot{\mu}+\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2+\frac{1}{R^2}=\kappa\rho \tag{25}$$

Dari ketiga persamaan medan di atas memberikan solusi yang trivial, sehingga perlu kondisi khusus untuk memperoleh dan akan dibahas selanjutnya.

SOLUSI PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN

Pada bagian ini, akan dianalisis persamaan (23-25) yang bersifat non-linier dan mempunyai solusi trial sehingga memberikan makna fisis dari kasus tersebut. Tinjau persamaan (24) dengan syarat harus memenuhi kondisi $R'>0$ sesuai persamaan (9), maka diperoleh

$$e^{\mu}=\frac{R'^2}{1+f(r)} \tag{26}$$

di mana $f(r)$ adalah fungsi yang bergantung terhadap koordinat r dan memenuhi kondisi $f(r)>-1$. Dengan mensubtitusi persamaan (26) ke dalam dua persamaan medan lainnya persamaan (23) dan (25), maka diperoleh

$$2R\ddot{R}+\dot{R}^2-f=0 \tag{27}$$

$$\frac{1}{RR'}\left(2\dot{R}\dot{R}'-f'\right)+\frac{1}{R^2}\left(\dot{R}^2-f\right)=\kappa\rho \tag{28}$$

Hasil integrasi dari persamaan (27) diperoleh ungkapan

$$\dot{R}^2=f(r)+\frac{F(r)}{R} \tag{29}$$

di mana $F(r)$ merupakan fungsi sembarang yang merupakan fungsi dari koordinat r. Dengan mensubtitusi persamaan (29) ke dalam persamaan (28), maka memberikan ungkapan

$$\frac{F'}{R^2R\prime}=\kappa\rho \tag{30}$$

Hasil integrasi darri persamaan (29) terhadap koordinat waktu memberikan ungkapan

$$R(t,r)=\left[R^{\frac{2}{3}}(r)\pm\frac{3}{2}F^{\frac{1}{2}}(r)\,t\right]^{2/3} \tag{31}$$

di mana ungkapan $R(r)=R(0,r)$ didefenisikan sebagai $R(t,r)$ pada $t=0$. Dengan menggunakan persamaan (29), maka diperoleh ungkapan lain dari persamaan (31) di mana masih memenuhi syarat terhadap koordinat r adalah

$$R(t,r)=(\kappa\rho)^{-2/3}\left[\frac{R^{\frac{1}{2}}(r)R'(r)}{F'(r)}\pm\frac{t}{2F^{\frac{1}{2}}(r)}\right]^{-\frac{2}{3}} \tag{32}$$

Dengan demikian, ungkapan dari persamaan (30) adalah

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho R^2R')=\frac{\partial F'}{\partial t}=0 \tag{33}$$

Hal ini memberikan makna fisis bahwasanya kecepatan gerak partikel pada titik t,r dapat berupa parabolik untuk $f(r)=0$, hiperbolik untuk $f(r)>0$ dan eliptik untuk $f(r)<0$ yang diungkapkan pada persamaan (27).

SOLUSI EKSTERIOR DARI METRIK TOLMAN

Pada bagian ini dibahas mengenai solusi eksterior dari metrik Tolman yang dapat ditranformasi ke metrik Schwarzild, yakni solusi persamaan medan Einstein simetri bola yang statis dan dalam keadaan vakum. Untuk solusi eksterior, maka kasus ini $r>a$, dengan demikian a dapat menjadi sebuah konstanta. Selain itu kasus, untuk solusi eksterior, maka tidak terdapat distribusi materi, sehingga rapat materi fluida menjadi $\rho=0$ hanya dengan

$$f(r)=0\,;$$
$$F(r)=r_s=konstan; \tag{34}$$

dengan mensubtitusi ke dalam persamaan (31), maka diperoleh ungkapan

$$R(r)=\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}r_s^{1/3}r^{2/3}$$
$$R(t,r)=\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}r_s^{1/3}(r-t)^{2/3} \tag{35}$$

Untuk menyelesaikan kasus ini, maka diperlukan transformasi koordinat yang invarian. Transformasi koordinat tersebut diberikan oleh persamaan

$$t=t'+\int\frac{\psi(r')dr'}{1+\psi(r')}$$
$$r=t'+\int\frac{1}{\psi(r')}+\frac{\psi(r')}{1+\psi(r')}\,dr' \tag{36}$$

di mana $\psi(r')=\left(\frac{r_s}{r'}\right)^{1/2}$. Dengan demikian, diperoleh metrik Schwarzschild dalam koordinat Eddington-Finkelstein yang bentuknya

$$ds^2=\left(1-\frac{r_s}{r'}\right)dt'^2-\left(1+\frac{r_s}{r'}\right)dr'^2-2\frac{r_s}{r'}dt'dr'-r'^2d\Omega^2 \tag{37}$$

dengan r_s adalah radius Schwarzschild.

Jurnal Fisika
Fisika Sains dan Aplikasinya

MEDAN GRAVITASI SIMETRI BOLA YANG STATIK UNTUK FLUIDA YANG TIDAK DIMAMPATKAN

Untuk kasus fluida yang tidak termampatkan, maka tensor energi-momentum yang digunakan adalah fluida ideal dengan kehadiran tekanan fluida, yang diungkapkan oleh

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} - pg^{\mu\nu} \tag{38}$$

di mana $c = 1$. Medan gravitasi yang ditinjau dalam kasus diasumsikan simetri bola dan dalam keadaan yang statis. Oleh karena itu, geometri ruang-waktu (tensor Ricci) yang tidak sama dengan nol adalah [17] :

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = -\kappa\rho \tag{39}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = \kappa p \tag{40}$$

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{1}{2}\nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{1}{2}\nu'\lambda'\right) = \kappa p \tag{41}$$

di mana λ dan ν maerupakan fungsi dari r itu sendiri. Sedangkan untuk vektor 4-kecepatan aliran fluida $u^{\mu} = (u^0 + u^{\alpha})$ memberikan ungkapan $u^0 = u_0^{-1} = (g_{00})^{1/2}$ dan untuk komponen ruangnya menjadi nol $u^{\alpha} = 0$. Sama pada pembahasan sebelumnya, tanda *prime* menunjukkan turunan pertama terhadap r. Berdasarkan hukum konservatif $\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0$, sehingga menghasilkan

$$p' = -\frac{1}{2}\nu'(\,p + \rho\,) \tag{42}$$

Persamaan (42) tidak *independent* dari persamaan (39 – 41) karena konsekuensi dari identitas Bianchi yang memberikan deskripsi gerak dan distribusi materi dalam ruang-waktu melengkung melalui hukum konservatif dari tensor energi momentumnya. Oleh karena itu, terdapat tiga persamaan (39 – 41) untuk empat fungsi yang tidak diketahui ν, λ, ρ, p. Dengan mengasumsikan bahwasanya ρ bergantung pada r, maka ν dan λ dapat diperoleh dari asumsi tersebut sehingga ungkapan untuk p juga dapat dihitung.

Solusi dari persamaan (39) diberikan oleh

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{\kappa}{4\pi}\frac{m(r)}{r} \tag{43}$$

di mana

$$m(r) = 4\pi\int_0^r \rho(r')r'\,dr' \tag{44}$$

adalah massa fluida yang terkandung dalam bola yang berjari-jari r. Solusi yang diberikan pada persamaan (44) dipilih sehingga $g_{\mu\nu}$ secara beraturan pada $r = 0$ akan menuju ke bentuk Schwarzschild yang diungkapkan

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_s}{r} \tag{45}$$

di mana $r_s = 2\,Gm/c^2$, G adalah konstanta gravitasi Newton, dan $m = m(r_0)$ adalah total massa yang dapat menghasilkan medan gravitasi. Hal tersebut memenuhi jika tidak ada rapat materi untuk kasus jari-jari lebih besar dari jari-jari awalnya ($\rho(r) = 0$ untuk $r > r_0$).

Sekarang ditinjau untuk kasus $r < r_0$ dengan mengasumsikan bahwasanya rapat materi (ρ) merupakan sebuah konstanta. Dengan demikian, untuk persamaan (42), (39), (40), dan (43) diperoleh ungkapan lainnya, yakni

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{r^2}{R^2} \tag{46}$$

$$e^{\nu/2} = A - B\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2} \tag{47}$$

$$p = \frac{1}{\kappa R^2}\left[\frac{3B\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}} - A}{A - B\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right] \tag{48}$$

di mana A dan B adalah konstanta, dan $R^2 = \frac{3}{\kappa\rho}$. Konstanta A dan B dapat diselesaikan dengan syarat $p = 0$ dan e^{ν} dapat direduksi ke dalam medan Schwarzschild pada permukaan bola. Sehingga diperoleh

$$A = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right)^{1/2};\; B = \frac{1}{2}; \tag{49}$$

$$e^{\nu/2} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2}; \tag{50}$$

$$p = \rho\left[\frac{\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1-\frac{r_0^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{3\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right] \tag{51}$$

dengan syarat $r_0^2 < R^2$. Jika diasumsikan bahwa tekanan di dalam fluida tersebar secara homogen namun terbatas, dari Persamaan (42) dapat diperoleh kondisi yang lebih membatasi pada

$$r_0^2 < \frac{8}{9}R^2 \tag{52}$$

Solusi yang disajikan pada persamaan (52) adalah solusi untuk kasus di dalam fluida yang disebut sebagai metrik interior Schwarzschild. Sedangkan untuk kasus di luar fluida, disebut metrik eksterior Schwarzschild. Solusinya memberikan contoh sederhana untuk keruntuhan fluida pada kondisi di atas.

KESIMPULAN

Persamaan medan Einstein dapat diperoleh dengan menggunakan analisis tensor

Reimann-Christoffel dalam ruang-waktu melengkung dimensi empat yang berbentuk koordinat bola simetri statis. Dalam kasus ini ditinjau kelengkungan ruang-waktu diakibatkan karena adanya distribusi materi fluida ideal yang dideskripsikan oleh tensor energi-momentum. Solusi persamaan medan Einstein yang diperoleh sangat tidak linier, namun dapat diselesaikan dengan asumsi bahwa lintasan partikel tidak berubah sepanjang geodesik tersebut dalam koordinat bergerak *(co-moving)*. Dengan demikian, jari-jari $r = kosntan$ pada titik-titik r_0 dan $r_0 + dr$.

Solusi medan Einstein yang diperoleh menunjukkan kecepatan gerak partikel daapat berupa parabolik $(f(r) = 0)$, hiperbolik $(f(r) > 0)$, dan eliptik $(f(r) < 0)$. Selain itu, diperoleh juga solusi eksterior simetri bola untuk metrik Tolman oleh persamaan (37). Untuk kasus $r \to \infty$, maka sumber medan gravitasi dalam hal ini distribusi fluida jauh dari medan sehingga ruang-waktu melengkung (Riemann) dimensi empat dapat direduksi menjadi ruang-waktu datar dimensi empat (Minkowski).

Solusi medan gravitasi untuk kasus fluida yang tidak dapat dimampatkan harus memenuhi identitas Bianchi yang memberikan deskripsi gerak dan distribusi materi dalam ruang-waktu melengkung melalui hukum konservatif melalui tensor energi momentum. Solusi yang diperoleh untuk $r > r_0$ memberikan makna bahwa tidak ada rapat materi $\rho(r) = 0$ di luar dari bola fluida yang tidak dapat dimampatkan dan biasa disebut sebagai solusi eksterior Schwarzschild. Sedangkan untuk $r > r_0$ menjelaskan bahwa rapat materi $\rho(r) = konstan$ sehingga kembali menjadi solusi Schwarzschild. Dengan membangun asumsi bahwa tekanan fluida tersebuar secara homgen dan terbatas, maka memberikan batasan untuk solusi interior Schawrzschild yakni $r_0^2 < \frac{8}{9}R^2$. Solusi merupakan contoh sederhana untuk keruntuhan fluida pada syarat tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

1 J. R. Oppenheimer and H. Snyder. 1939. On Continued Gravitational Contraction. Phys. Rev. **56**: 455.

2 K. Schwarzschild. 1916. Uber das Gravitationsfeld einer Kugelaus inkompressibler Flussigkeit nach der Einsteinschen Theorie. Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math-Phys. Tech.: 424-434.

3 J. R. Oppenheimer and G. Volkoff. 1939. On massive neutron cores. Phys. Rev. **55**: 374.

4 K. S. Thorne, R. H. Price and D. A. Macdonald. 1986. *Black holes: The membrane paradigm.* Yale University Press: New Haven and London.

5 Ya. B. Zel'dovich and I. D. Novikov. 1971. *Relativistic Astrophysics*, The University of Chicago Press: Chicago, Illinois.

6 Yunes, N. and Pretorius, F. 2009. Dynamical Chern-Simons Modified Gravity I: Spinning Black Holes in the Slow-Rotation Approximation. Phys. Rev. D **79**: 084043.

7 Cardoso, V. and Gualtieri, L. 2010. Perturbations of Schwarzschild black holes in Dynamical Chern-Simons modified gravity. Phys. Rev. D **81**: 089903.

8 Molina, C., Pani, P., Cardoso, V. and Gualtieri, L. 2010. Gravitational signature of Schwarzschild black holes in dynamical Chern-Simons gravity. Phys. Rev. D **81**: 124021.

9 Pani, P., Cardoso V. and Gualtieri, L. 2011. Gravitational waves from extreme mass-ratio inspirals in Dynamical Chern-Simons gravity. Phys. Rev. D **83**: 104048.

10 Konno, K., Matsuyama, T. and Tanda, S. 2009. Rotating black hole in extended Chern Simons modified gravity. Prog. Theor. Phys. **122**: 561.

11 Chen, S. and Jing, J. 2010. Geodetic precession and strong gravitational lensing in the dynamical Chern-Simons modified gravity. Class. Quant. Grav. **27**: 225006.

12 Pani, P., Macedo, C.F.B., Crispino, L.C.B. and Cardoso, V. 2011. Slowly rotating black holes in alternative theories of gravity. Phys. Rev. D **84**: 087501.

13 Reissner, H. 1916. Ober die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. Annalen der Physik, **355**(9): p. 106-120.

14 Nordstrom, G. On the Energy of the Gravitation field in Einstein Theory.

Koninklijke Nederlandse Akademie van Weteschappen Proceedings Series B Physical Sciences, 1918. 20: p. 1238-1245

15 Zhang, Z.Y. 1992. Gravitation of the Klein-Gordon Scalar Field. Int. Journ. of Theo. Phys **32** : 2015–2021.

16 Tolman, Richard C. *1934*. Effect of Inhomogeneity on Cosmological Models. *Proc. Natl. Acad. Sci. National Academy of Sciences of the USA.* ***20*** *(3): 169–76.*

17 Griffiths, J.B., and Podolsky, J. 2009. Exact Spaces-Time in Einstein's General Relativity. Cambridge University Press: Cambridge University, New York.