

Pewarnaan Titik r -Dinamis pada Graf Cricket

Nurita Kusumawati¹, Arika Indah Kristiana^{1*}, Ridho Alfarisi¹, Robiatul Adawiyah¹, Toto Bara Setiawan¹, Rafiantika Megahnia Prihandini¹

¹Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Jember, Jember-Jawa Timur, Indonesia

*Penulis korespondensi: arika.fkip@unej.ac.id

Diterima: 28 Juli 2023; Direvisi: 23 Oktober 2023; Disetujui: 30 Oktober 2023; Dipublikasi: 09 Januari 2024.

Abstrak: Graf didefinisikan sebagai himpunan terurut dari (V, E) dimana V adalah himpunan tak kosong dari unsur yang disebut titik dan E adalah himpunan sisi yang berhingga dan boleh kosong serta setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda dari $V(G)$. Pewarnaan r -dinamis didefinisikan sebagai $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ sedemikian sehingga memenuhi kondisi berikut jika $uv \in E(G)$, maka $c(u) \neq c(v)$, dan $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$, untuk bilangan bulat positif r dan $d(v)$ merupakan derajat titik v . Tujuan dari pewarnaan r -dinamis yaitu untuk mencari bilangan kromatik paling minimum dari pewarnaan graf dengan parameter r yang tidak terbatas. Pewarnaan r -dinamis dilakukan pada graf *cricket* dipilih karena belum ada penelitian yang dilakukan sebelumnya. Metode yang digunakan pada penelitian ini yaitu metode penelitian deduktif aksiomatik dan metode pendeteksi pola.

Kata Kunci: graf cricket, pewarnaan r -dinamis, bilangan kromatik r -dinamis

Abstract: A graph is defined as an ordered set (V, E) where V is a non-empty set of elements called vertices and E is a set of edges which are finite and may be empty and each edge connects two different points of $V(G)$. The r -dynamic coloring is defined as $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ such that it satisfies the following conditions if $uv \in E(G)$, then $c(u) \neq c(v)$, and $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$, for positive integers r and degree of vertex v . The purpose of r -dynamic coloring is to find the minimum chromatic number of graph coloring with unlimited parameter r . Dynamic coloring is performed on cricket graphs because no research has been done before. The method used in this research is the axiomatic deductive research method and the pattern detection method.

Keywords: Cricket graph, r -dynamic coloring, r -dynamic chromatic number

1. Pendahuluan

Graf *cricket* merupakan salah satu contoh graf unicyclic yaitu graf yang memiliki tepat satu graf siklus [1, 2]. Graf *cricket* terbentuk dari gabungan graf lingkaran C_n dan graf lintasan P_m , yang dihubungkan dengan dua graf lintasan pada dua sisi di satu titik graf lingkaran. Graf *cricket* dinotasikan sebagai $Cr_{n,m}$, dengan n banyaknya titik pada graf lingkaran dengan syarat $n \geq 3$, sedangkan m banyak titik pada graf lintasan syarat $m \geq 2$. Berikut ini dijelaskan pewarnaan r -dinamis dan bilangan kromatik r -dinamis.

Definisi 1.1. [3, 4] Pewarnaan r -dinamis didefinisikan sebagai $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ sehingga memenuhi syarat berikut.

- a. : Jika $uv \in E(G)$, maka $c(u) \neq c(v)$, dan
- b. $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$

Fungsi yang memetakan titik u pada graf ke himpunan warna $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ dalam pewarnaan r -dinamis dapat dinotasikan sebagai $c(u)$. Notasi $N(v)$ pada sebuah graf dapat diartikan sebagai persekitaran titik v , sedangkan $|c(N(v))|$ adalah banyaknya warna pada persekitaran titik v . Pewarnaan r -dinamis haruslah memenuhi $|c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$, dimana $\min\{r, d(v)\}$ merupakan minimal antara bilangan bulat positif r dan derajat titik v . Dua titik yang bertetangga pada graf harus memiliki warna yang berbeda. Tujuan dari pewarnaan r -dinamis adalah untuk mencari bilangan kromatik paling minimum dari pewarnaan graf dengan parameter r .

Definisi 1.2. [5, 6] Bilangan kromatik r -dinamis adalah nilai minimum k sehingga graf G memiliki r -dinamis k -warna. Bilangan kromatik r -dinamis dinotasikan dengan $\chi_r(G)$

Pewarnaan r -dinamis dibuktikan dengan observasi dan lema berikut.

Observasi 1.1. [7, 8] Untuk $r = \{1, 2, 3, 4, \dots, \Delta\}$ bilangan kromatik r -dinamis berlaku $\chi(G) = \chi_1(G) \leq \chi_2(G) \leq \chi_3 \leq \dots \leq \chi_\Delta(G)$, dan jika $r \geq \Delta(G)$, maka $\chi_r(G) = \chi_\Delta(G)$.

Lema 1.1. [9, 10] Diketahui $G = (V, E)$ adalah sebuah graf dan H adalah subgraf dari graf G , $H \subseteq G$ maka $\chi_r(H) \leq \chi_r(G)$.

Proposisi 1.1. [11] Misalkan graf siklus C_n , untuk $r = 2, 3, \dots$, maka bilangan kromatik r -dinamis adalah

$$\chi_r(C_n) = \begin{cases} 5, & n = 5 \\ 3, & n = 3k, k = 1, 2, 3, \dots \\ 4, & n \text{ yang lain} \end{cases}$$

Penyajian penelitian ini diawali dengan penyajian batas bawah pewarnaan r -dinamis, kemudian menentukan batas atas dengan fungsi pewarnaan, dan melakukan pengecekan fungsi pewarnaan r -dinamis yang didapat berbantuan tabel agar sesuai dengan Definisi 1.

2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian deduktif aksiomatik dan metode pendeteksi pola. Metode penelitian deduktif aksiomatik merupakan metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang biasanya berlaku pada logika matematika dengan menggunakan definisi pewarnaan r -dinamis serta aksioma atau teorema yang telah ada, kemudian digunakan untuk melakukan pewarnaan r -dinamis pada keluarga graf *unicyclic*. Metode pendeteksi pola adalah metode yang digunakan untuk menentukan pola pada pewarnaan r -dinamis sehingga didapat bilangan kromatik r -dinamis.

3. Hasil dan Pembahasan

Teorema 3.1. Diberikan graf cricket $(Cr_{n,m})$ dengan syarat $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ bilangan kromatik r -dinamis adalah:

$$\chi_r(Cr_{n,m}) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } r = 1, 2 \text{ dan } n \equiv 0 \pmod{3} \\ 4, & \text{untuk } r = 3 \text{ dan } n \equiv 0 \pmod{3} \text{ atau} \\ & \text{untuk } r = 1, 2, 3 \text{ dan } n \equiv 1 \pmod{3} \text{ atau} \\ & \text{untuk } r = 1, 2, 3 \text{ dan } n \equiv 2 \pmod{3} \text{ dengan syarat } n > 5 \\ 5, & \text{untuk } r \text{ lainnya dan } n \text{ lainnya} \end{cases}$$

Bukti. Graf *cricket* disusun oleh graf lingkaran dan graf lintasan, maka untuk $n \geq 3$ serta $m \geq 2$, himpunan titik dan himpunan sisi graf cricket adalah $V(Cr_{n,m}) = \{x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{1j}, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_{2j}, 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(Cr_{n,m}) = \{x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1 x_n\} \cup \{x_1 y_{11}\} \cup \{x_1 y_{21}\} \cup \{y_{1,j} y_{1,j+1}, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{2,j} y_{2,j+1}, 1 \leq j \leq m-1\}$. Graf *cricket* memiliki derajat tertinggi yaitu pada titik x_1 dengan $d(x_1) = 4$ dengan kata lain $\Delta(Cr_{n,m}) = 4$. Graf siklus merupakan subgraf dari graf *cricket* sehingga berdasarkan Lema 1 dan Proposisi 1 diperoleh $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq \chi_r(Cr_n)$. Dapat disimpulkan $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq \chi_r(Cr_n) = 3$ dengan $n \equiv 0 \pmod{3}$ untuk $r \geq 1$, $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq \chi_r(Cr_n) = 5$ dengan $n = 5$ untuk $r \geq 1$, $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq \chi_r(Cr_n) = 4$ dengan $n \equiv 1 \pmod{3}$ untuk $r \geq 1$, dan $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq \chi_r(Cr_n) = 4$ untuk $n \equiv 2 \pmod{3}$ dengan syarat $n > 5$ untuk $r \geq 1$.

Kasus 1. Untuk $r < 3$ dan $n \equiv 0 \pmod{3}$

Karena graf *cricket* merupakan graf yang terdiri dari satu graf lingkaran, maka perlu diperhatikan pewarnaan r -dinamis pada graf lingkaran. Sebelumnya telah diketahui bahwa bilangan kromatik r -dinamis pada graf siklus dengan $n \equiv 0 \pmod{3}$ adalah tiga, sehingga berdasarkan Lema 1 dan Proposisi 1 didapat batas bawahnya $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq \chi_r(Cr_n) = 3$ Kemudian dibuktikan batas atasnya adalah $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 3$.

Diberikan $c : V(Cr_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, 3\}$.

$$c(x_i) = \begin{cases} 3, & i \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n \\ 1, & i \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n \\ 2, & i \equiv 2 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$c(y_{1,j}) = \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq j \leq m \\ 3, & j \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq m \\ 2, & j \equiv 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

$$c(y_{2,j}) = \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq j \leq m \\ 3, & j \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq m \\ 2, & j \equiv 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Tabel 3.1: Pewarnaan Titik 1, 2, 3-Dinamis pada $(Cr_{n,m})$

v_i	$c(v_i)$	$ c(N(v_i)) $	r	$d(v_i)$	$\min(r, d(v_i))$	$ c(N(v_i)) \geq \min(r, d(v_i))$
x_1	1	2	1, 2, 3	4	1, 2, 3	YA, YA, TIDAK
x_2	2	2	1, 2, 3	2	1, 2, 2	YA, YA, YA
x_3	3	2	1, 2, 3	2	1, 2, 2	YA, YA, YA
x_4	1	2	1, 2, 3	2	1, 2, 2	YA, YA, YA
x_5	2	2	1, 2, 3	2	1, 2, 2	YA, YA, YA
x_6	3	2	1, 2, 3	2	1, 2, 2	YA, YA, YA
y_{11}	3	2	1, 2, 3	2	1, 2, 2	YA, YA, YA
y_{12}	2	2	1, 2, 3	2	1, 2, 2	YA, YA, YA
y_{13}	1	2	1, 2, 3	2	1, 2, 2	YA, YA, YA
y_{21}	3	2	1, 2, 3	2	1, 2, 2	YA, YA, YA
y_{21}	2	2	1, 2, 3	2	1, 2, 2	YA, YA, YA
y_{22}	1	2	1, 2, 3	2	1, 2, 2	YA, YA, YA

Pada Tabel 3.1 terdapat satu warna yang tidak memenuhi Definisi 1 yaitu pada saat $r = 3$ di titik x_1 karena $|c(N(x_i))| = 2 \leq 3$ sehingga $\chi_r(Cr_{n,m}) > 3$ untuk $r = 3$ dan $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 3$ untuk $r < 3$. Karena $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq 3$ dan $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 3$ untuk $r < 3$ maka dapat disimpulkan bahwa $\chi_r(Cr_{n,m}) = 3$ untuk $r < 3$ dan $n \equiv 0 \pmod{3}$.

Kasus 2. Untuk $r = 3$ dan $n \equiv 0 \pmod{3}$

Berdasarkan Observasi 1 karena $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq \chi_2(Cr_{n,m}) = 3$ untuk $r \geq 3$ maka didapat dua

kemungkinan yaitu $\chi_r(Cr_{n,m}) = 3$ untuk $r \geq 3$ atau $\chi_r(Cr_{n,m}) > 3$ untuk $r \geq 3$. Berdasarkan Tabel 3.1 dapat dilihat pada titik x_1 untuk $r = 3$ kontradiksi dengan Definisi 1 sehingga disimpulkan bahwa $\chi_r(Cr_{n,m}) \neq 3$ untuk $r \geq 3$. Karena $\chi_r(Cr_{n,m}) = 3$ tidak memungkinkan untuk $r \geq 3$, maka didapat batas bawahnya adalah $\chi_r(Cr_{n,m}) > 3$ untuk $r \geq 3$ atau dapat ditulis $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq 4$ untuk $r \geq 3$. Selanjutnya dibuktikan batas atasnya $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 4$. Diberikan $c : V(Cr_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$.

$$c(x_i) = \begin{cases} 3, & i \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n \\ 1, & i \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n \\ 2, & i \equiv 2 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$c(y_{1,j}) = \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 4, & j \equiv 1 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 3, & j \equiv 2 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 2, & j \equiv 3 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

$$c(y_{2,j}) = \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 4, & j \equiv 1 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 3, & j \equiv 2 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 2, & j \equiv 3 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Tabel 3.2: Pewarnaan Titik 3, 4-Dinamis pada $(Cr_{n,m})$

v_i	$c(v_i)$	$ c(N(v_i)) $	r	$d(v_i)$	$\min(r, d(v_i))$	$ c(N(v_i)) \geq \min(r, d(v_i))$
x_1	1	3	3, 4	4	3, 4	YA, TIDAK
x_2	2	2	3, 4	2	2, 2	YA, YA
x_3	3	2	3, 4	2	2, 2	YA, YA
x_4	1	2	3, 4	2	2, 2	YA, YA
x_5	2	2	3, 4	2	2, 2	YA, YA
x_6	3	2	3, 4	2	2, 2	YA, YA
y_{11}	4	2	3, 4	2	2, 2	YA, YA
y_{12}	3	2	3, 4	2	2, 2	YA, YA
y_{13}	2	2	3, 4	2	2, 2	YA, YA
y_{21}	4	2	3, 4	2	2, 2	YA, YA
y_{22}	3	2	3, 4	2	2, 2	YA, YA
y_{23}	2	2	3, 4	2	2, 2	YA, YA

Berdasarkan Tabel 3.2 terdapat pewarnaan yang tidak memenuhi Definisi 1 yaitu pada $r = 4$ di titik x_1 maka disimpulkan bahwa $(Cr_{n,m}) \leq 4$ berlaku untuk $r = 3$ Karena $(Cr_{n,m}) \geq 4$ untuk $r \geq 3$ dan $(Cr_{n,m}) \leq 4$ untuk $r = 3$ maka terbukti bahwa $(Cr_{n,m}) = 4$ untuk $r = 3$.

Kasus 3. Untuk $r > 3$ dan $n \equiv 0 \pmod{3}$

Berdasarkan Observasi 1 karena $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq \chi_3(Cr_{n,m}) = 4$ untuk $r > 3$ maka didapat dua kemungkinan yaitu $\chi_r(Cr_{n,m}) = 4$ untuk $r > 3$ atau $\chi_r(Cr_{n,m}) > 4$ untuk $r > 3$. Berdasarkan Tabel 3.2 dapat dilihat pada titik x_1 untuk $r = 4$ kontradiksi dengan Definisi 1 sehingga disimpulkan bahwa $\chi_r(Cr_{n,m}) \neq 4$ untuk $r > 3$. Karena $\chi_r(Cr_{n,m}) = 4$ tidak memungkinkan untuk $r > 3$ maka didapat batas bawahnya adalah $\chi_r(Cr_{n,m}) > 4$ untuk $r > 3$ atau dapat ditulis $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq 5$ untuk $r > 3$. Selanjutnya dibuktikan bahwa batas atas bilangan kromatik r -dinamis $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 5$ untuk $r > 3$. Diberikan $c : V(Cr_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$c(x_i) = \begin{cases} 3, & i \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n \\ 1, & i \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n \\ 2, & i \equiv 2 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$c(y_{1,j}) = \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 4, & j \equiv 1 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 3, & j \equiv 2 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 2, & j \equiv 3 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

$$c(y_{2,j}) = \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \pmod{5}, 1 \leq j \leq m \\ 5, & j \equiv 1 \pmod{5}, 1 \leq j \leq m \\ 4, & j \equiv 2 \pmod{5}, 1 \leq j \leq m \\ 3, & j \equiv 3 \pmod{5}, 1 \leq j \leq m \\ 2, & j \equiv 4 \pmod{5}, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Tabel 3.3: Pewarnaan Titik 4, 5, 6-Dinamis pada $(Cr_{n,m})$

v_i	$c(v_i)$	$ c(N(v_i)) $	r	$d(v_i)$	$\min(r, d(v_i))$	$ c(N(v_i)) \geq \min(r, d(v_i))$
x_1	1	4	4, 5, 6	4	4, 4, 4	YA, YA, YA
x_2	2	2	4, 5, 6	2	2, 2, 2	YA, YA, YA
x_3	3	2	4, 5, 6	2	2, 2, 2	YA, YA, YA
x_4	1	2	4, 5, 6	2	2, 2, 2	YA, YA, YA
x_5	2	2	4, 5, 6	2	2, 2, 2	YA, YA, YA
x_6	3	2	4, 5, 6	2	2, 2, 2	YA, YA, YA
y_{11}	4	2	4, 5, 6	2	2, 2, 2	YA, YA, YA
y_{12}	3	2	4, 5, 6	2	2, 2, 2	YA, YA, YA
y_{13}	2	2	4, 5, 6	2	2, 2, 2	YA, YA, YA
y_{21}	5	2	4, 5, 6	2	2, 2, 2	YA, YA, YA
y_{22}	4	2	4, 5, 6	2	2, 2, 2	YA, YA, YA
y_{23}	3	2	4, 5, 6	2	2, 2, 2	YA, YA, YA

Berdasarkan Tabel 3.3 pewarnaan yang dilakukan sudah memenuhi Definisi 1 pada derajat tertingginya atau pada titik x_1 , didapat $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 5$ untuk $r > 3$. Karena $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq 5$ untuk $r > 3$ dan $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 5$ untuk $r > 3$ maka dapat disimpulkan bahwa $\chi_r(Cr_{n,m}) = 5$ untuk $r > 3$.

Kasus 4. Untuk $n = 5$ dan $r \geq 1$

Pada pewarnaan r -dinamis graf lingkaran dengan $n = 5$ didapat bilangan kromatiknya yaitu $\chi_r(C_5) = 5$. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 1 dan Teorema 1 maka dalam melakukan pewarnaan graf *cricket* dibutuhkan paling sedikit lima warna atau diketahui batas bawahnya yaitu $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq \chi_r(C_n) = 5$. Selanjutnya dibuktikan bahwa batas atas bilangan kromatik r -dinamis $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 5$. Diberikan $c : V(Cr_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$c(x_i) = \begin{cases} 1, & i \equiv 0 \pmod{5}, 1 \leq i \leq n \\ 5, & i \equiv 1 \pmod{5}, 1 \leq i \leq n \\ 4, & i \equiv 2 \pmod{5}, 1 \leq i \leq n \\ 3, & i \equiv 3 \pmod{5}, 1 \leq i \leq n \\ 2, & i \equiv 4 \pmod{5}, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$c(y_{1,j}) = \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 4, & j \equiv 1 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 3, & j \equiv 2 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 2, & j \equiv 3 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

$$c(y_{2,j}) = \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq j \leq m \\ 3, & j \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq m \\ 2, & j \equiv 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Tabel 3.4: Pewarnaan Titik 1, 2, 3, 4, 5-Dinamis pada $(Cr_{n,m})$

v_i	$c(v_i)$	$ c(N(v_i)) $	r	$d(v_i)$	$\min(r, d(v_i))$	$ c(N(v_i)) \geq \min(r, d(v_i))$
x_1	1	4	1, 2, 3, 4, 5	4	1, 2, 3, 4, 4	YA, YA, YA, YA, YA
x_2	2	2	1, 2, 3, 4, 5	2	1, 2, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA, YA
x_3	3	2	1, 2, 3, 4, 5	2	1, 2, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA, YA
x_4	4	2	1, 2, 3, 4, 5	2	1, 2, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA, YA
x_5	5	2	1, 2, 3, 4, 5	2	1, 2, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA, YA
y_{11}	4	2	1, 2, 3, 4, 5	2	1, 2, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA, YA
y_{12}	3	2	1, 2, 3, 4, 5	2	1, 2, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA, YA
y_{13}	2	2	1, 2, 3, 4, 5	2	1, 2, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA, YA
y_{21}	1	2	1, 2, 3, 4, 5	2	1, 2, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA, YA
y_{22}	2	2	1, 2, 3, 4, 5	2	1, 2, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA, YA
y_{23}	3	2	1, 2, 3, 4, 5	2	1, 2, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA, YA

Berdasarkan Tabel 3.4 pewarnaan pada derajat tertinggi graf cricket dengan $n = 5$ sudah memenuhi Definisi 1 maka dapat disimpulkan batas atas bilangan kromatik r -dinamis untuk $n = 5$ adalah $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 5$. Karena $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq 5$ dan $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 5$ maka terbukti $\chi_r(Cr_{n,m}) = 5$ untuk $n = 5$.

Kasus 5. Untuk $r < 4$ dan $n \equiv 1 \pmod{3}$

Bilangan kromatik r -dinamis pada graf lingkaran untuk $n \equiv 1 \pmod{3}$ adalah empat. Untuk n lainnya maka yang dimaksud adalah untuk $n = 1 \pmod{3}$ dan $n = 2 \pmod{3}$ dengan syarat $n > 5$. Berdasarkan Lemma 1 maka didapat batas bawah bilangan kromatik r -dinamis pada graf *cricket* untuk n lainnya dan $m \geq 2$ adalah empat, atau $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq \chi_r(C_n) = 4$. Selanjutnya dibuktikan bahwa batas atas bilangan kromatik r -dinamis adalah $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 4$. Diberikan $c : V(Cr_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$.

$$c(x_i) = \begin{cases} 3, & i \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n \\ 1, & i \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n \\ 2, & i \equiv 2 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n \\ 4, & i \equiv n \end{cases}$$

$$c(y_{1,j}) = \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq j \leq m \\ 3, & j \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq m \\ 2, & j \equiv 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

$$c(y_{2,j}) = \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq j \leq m \\ 3, & j \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq m \\ 2, & j \equiv 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Tabel 3.5: Pewarnaan Titik 1, 2, 3, 4-Dinamis pada $(Cr_{n,m})$

v_i	$c(v_i)$	$ c(N(v_i)) $	r	$d(v_i)$	$\min(r, d(v_i))$	$ c(N(v_i)) \geq \min(r, d(v_i))$
x_1	1	3	1, 2, 3, 4	4	1, 2, 3, 4	YA, YA, YA, TIDAK
x_2	2	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
x_3	3	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
x_4	1	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
x_5	2	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
x_6	3	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
x_7	4	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
y_{11}	3	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
y_{12}	2	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
y_{13}	1	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
y_{21}	3	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
y_{22}	2	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
y_{23}	1	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA

Berdasarkan Tabel 3.5 terdapat satu pewarnaan yang tidak memenuhi Definisi 1 yaitu pada $r = 4$ di titik x_1 sehingga dapat dikatakan bahwa $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 4$ untuk $r < 4$. Karena $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq 4$ dan $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 4$ untuk $r < 4$ maka dapat disimpulkan bahwa $\chi_r(Cr_{n,m}) = 4$ untuk $r < 4$.

Kasus 6. Untuk $r \geq 4$ dan $n \equiv 1 \pmod 3$

Berdasarkan Observasi 1 karena $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq \chi_3(Cr_{n,m}) = 4$ untuk $r \geq 4$ maka didapat dua kemungkinan yaitu $\chi_r(Cr_{n,m}) = 4$ untuk $r \geq 4$ atau $\chi_r(Cr_{n,m}) > 4$ untuk $r \geq 4$. Berdasarkan Tabel 3.5 dapat dilihat pada titik x_1 untuk $r = 4$ kontradiksi dengan Definisi 1 sehingga disimpulkan bahwa $\chi_r(Cr_{n,m}) \neq 4$ untuk $r \geq 4$. Karena $\chi_r(Cr_{n,m}) = 4$ tidak memungkinkan untuk $r \geq 4$ maka didapat batas bawahnya adalah $\chi_r(Cr_{n,m}) > 4$ untuk $r \geq 4$ atau dapat ditulis $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq 5$ untuk $r \geq 4$. Kemudian dibuktikan bahwa batas atas $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 5$. Diberikan $c : V(Cr_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$c(x_i) = \begin{cases} 3, & i \equiv 0 \pmod 3, 1 \leq i \leq n \\ 1, & i \equiv 1 \pmod 3, 1 \leq i \leq n \\ 2, & i \equiv 2 \pmod 3, 1 \leq i \leq n \\ 4, & i \equiv n \end{cases}$$

$$c(y_{1,j}) = \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \pmod 3, 1 \leq j \leq m \\ 3, & j \equiv 1 \pmod 3, 1 \leq j \leq m \\ 2, & j \equiv 2 \pmod 3, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

$$c(y_{2,j}) = \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \pmod 5, 1 \leq j \leq m \\ 5, & j \equiv 1 \pmod 5, 1 \leq j \leq m \\ 4, & j \equiv 2 \pmod 5, 1 \leq j \leq m \\ 3, & j \equiv 3 \pmod 5, 1 \leq j \leq m \\ 2, & j \equiv 4 \pmod 5, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Tabel 3.6: Pewarnaan Titik 4, 5, 6-Dinamis pada $(Cr_{n,m})$

v_i	$c(v_i)$	$ c(N(v_i)) $	r	$d(v_i)$	$\min(r, d(v_i))$	$ c(N(v_i)) \geq \min(r, d(v_i))$
x_1	1	4	4, 5, 6	4	4, 4, 4	YA, YA, YA
x_2	2	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
x_3	3	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
x_4	1	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
x_5	2	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
x_6	3	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
x_7	4	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
y_{11}	3	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
y_{12}	2	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
y_{13}	1	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
y_{21}	5	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
y_{22}	4	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
y_{23}	3	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA

Dapat dilihat pada Tabel 3.6 pewarnaan yang dilakukan pada derajat tertinggi telah memenuhi Definisi.1 sehingga disimpulkan bahwa $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 5$ untuk $r \geq 4$. Karena $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq 5$ untuk $r \geq 4$ dan $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 5$ untuk $r \geq 4$ maka dapat disimpulkan bahwa $r \geq 4$ dan $\chi_r(Cr_{n,m}) = 5$ untuk $r \geq 4$.

Kasus 7. Untuk $r < 4$ dan $n \equiv 2 \pmod{3}$ dengan syarat $n > 5$

Berikut dibuktikan bilangan kromatik r -dinamis untuk $n \equiv 2 \pmod{3}$ dengan syarat $n > 5$. Berdasarkan Lemma 1 didapat batas bawah bilangan kromatik r -dinamis adalah empat, atau $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq \chi_r(C_n) = 4$. Selanjutnya dibuktikan batas atas, $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 4$. Diberikan $c : V(Cr_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$.

$$c(x_i) = \begin{cases} 3, & i \equiv n; 0 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n \\ 1, & i \equiv n - 2; 1 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n \\ 2, & i \equiv n - 3; 2 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n \\ 4, & i \equiv n - 1; n - 4 \end{cases}$$

$$c(y_{1,j}) = \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 4, & j \equiv 1 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 3, & j \equiv 2 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 2, & j \equiv 3 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

$$c(y_{2,j}) = \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 4, & j \equiv 1 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 3, & j \equiv 2 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 2, & j \equiv 3 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Tabel 3.7: Pewarnaan Titik 1, 2, 3, 4-Dinamis pada $(Cr_{n,m})$

v_i	$c(v_i)$	$ c(N(v_i)) $	r	$d(v_i)$	$\min(r, d(v_i))$	$ c(N(v_i)) \geq \min(r, d(v_i))$
x_1	1	3	1, 2, 3, 4	4	1, 2, 3, 4	YA, YA, YA, TIDAK
x_2	2	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
x_3	3	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
x_4	4	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
x_5	2	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
x_6	1	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
x_7	4	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
x_8	3	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
y_{11}	4	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
y_{12}	3	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
y_{13}	2	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
y_{21}	4	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
y_{22}	3	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA
y_{23}	2	2	1, 2, 3, 4	2	1, 2, 2, 2	YA, YA, YA, YA

Dapat dilihat pada Tabel 3.7 terdapat satu pewarnaan yang tidak memenuhi Definisi 1 yaitu pada saat $r = 4$ di titik x_1 sehingga dapat dikatakan bahwa terbukti $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 4$ untuk $r < 4$. Karena $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq 4$ dan $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 4$ untuk $r < 4$ maka dapat diketahui bahwa $\chi_r(Cr_{n,m}) = 4$ untuk $r < 4$.

Kasus 8. Untuk $r \geq 4$ dan $n \equiv 2 \pmod{3}$ dengan syarat $n > 5$

Berdasarkan Observasi 1 karena $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq \chi_3(Cr_{n,m}) = 4$ untuk $r \geq 4$ maka didapat dua kemungkinan yaitu $\chi_r(Cr_{n,m}) = 4$ untuk $r \geq 4$ atau $\chi_r(Cr_{n,m}) > 4$ untuk $r \geq 4$. Berdasarkan Tabel 3.7 dapat dilihat pada titik x_1 untuk $r = 4$ kontradiksi dengan Definisi 1 sehingga disimpulkan bahwa $\chi_r(Cr_{n,m}) \neq 4$ untuk $r \geq 4$. Karena $\chi_r(Cr_{n,m}) = 4$ tidak memungkinkan untuk $r \geq 4$ maka didapat batas bawahnya adalah $\chi_r(Cr_{n,m}) > 4$ untuk $r \geq 4$ atau dapat ditulis $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq 5$ untuk $r \geq 4$. Kemudian dibuktikan batas atas bilangan kromatik r-dinamis adalah $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 5$ untuk $r \geq 4$. Diberikan $c : V(Cr_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$c(x_i) = \begin{cases} 3, & i \equiv n; 0 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n \\ 1, & i \equiv n - 2; 1 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n \\ 2, & i \equiv n - 3; 2 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n \\ 4, & i \equiv n - 1; n - 4 \end{cases}$$

$$c(y_{1,j}) = \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 4, & j \equiv 1 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 3, & j \equiv 2 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \\ 2, & j \equiv 3 \pmod{4}, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

$$c(y_{2,j}) = \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \pmod{5}, 1 \leq j \leq m \\ 5, & j \equiv 1 \pmod{5}, 1 \leq j \leq m \\ 4, & j \equiv 2 \pmod{5}, 1 \leq j \leq m \\ 3, & j \equiv 3 \pmod{5}, 1 \leq j \leq m \\ 2, & j \equiv 4 \pmod{5}, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Tabel 3.8: Pewarnaan Titik 4, 5, 6-Dinamis pada $(Cr_{n,m})$

v_i	$c(v_i)$	$ c(N(v_i)) $	r	$d(v_i)$	$\min(r, d(v_i))$	$ c(N(v_i)) \geq \min(r, d(v_i))$
x_1	1	4	4, 5, 6	4	4, 4, 4	YA, YA, YA
x_2	2	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
x_3	3	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
x_4	4	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
x_5	2	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
x_6	1	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
x_7	4	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
x_8	3	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
y_{11}	4	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
y_{12}	3	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
y_{13}	2	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
y_{21}	5	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
y_{22}	4	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA
y_{23}	3	2	4, 5, 6	2	4, 4, 4	YA, YA, YA

Berdasarkan Tabel 3.8 pewarnaan yang dilakukan pada derajat tertinggi graf *cricket* pada titik x_1 telah memenuhi Definisi 1 maka terbukti bahwa $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 5$ untuk $r \geq 4$. Karena $\chi_r(Cr_{n,m}) \geq 5$ untuk $r \geq 4$ dan $\chi_r(Cr_{n,m}) \leq 5$ untuk $r \geq 4$ maka terbukti bahwa $\chi_r(Cr_{n,m}) = 5$ untuk $r \geq 4$. \square

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembuktian di atas, didapat teorema yaitu jika ditentukan graf *cricket* $(Cr_{n,m})$ dengan syarat $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ bilangan kromatik r -dinamis adalah:

$$\chi_r(Cr_{n,m}) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } r = 1, 2 \text{ dan } n \equiv 0 \pmod{3} \\ 4, & \text{untuk } r = 3 \text{ dan } n \equiv 0 \pmod{3} \\ 4, & \text{untuk } r = 1, 2, 3 \text{ dan } n \equiv 1 \pmod{3} \\ 4, & \text{untuk } r = 1, 2, 3 \text{ dan } n \equiv 2 \pmod{3} \text{ dengan syarat } n > 5 \\ 5, & \text{untuk } r \text{ lainnya dan } n \text{ lainnya} \end{cases}$$

Referensi

- [1] B. Aprilianto, D. Dafik, and E. R. Albirri, "Dimensi metrik sisi pada beberapa graf unicyclic," *CGANT Journal of Mathematics and Applications*, vol. 1, no. 2, 2020. [View online](#).
- [2] R. Alfarisi, R. Adawiyah, R. M. Prihandini, E. R. Albirri, I. H. Agustin, *et al.*, "Super domination number of unicyclic graphs," in *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, vol. 243, p. 012074, IOP Publishing, 2019. [View online](#).
- [3] A. P. Liowardani, D. Dafik, and A. Fatahillah, "Pewarnaan titik r-dinamis pada graf hasil operasi edge corona," *CGANT Journal of Mathematics and Applications*, vol. 1, no. 2, 2020. [View online](#).
- [4] R. M. Falc3n Ganformina, M. Venkatachalam, S. Gowri, and G. Nandini, "On the r-dynamic coloring of some fan graph families," *Analele științifice ale Universității "Ovidius" Constanța. Seria Matematică*, 29 (3), 151-181., 2021. [View online](#).
- [5] A. I. Kristiana, D. Dafik, Q. A'yun, R. Adawiyah, and R. Alfarisi, "On irregular colorings of unicyclic graph family," *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, vol. 7, no. 4, pp. 503–512, 2023. [View online](#).

- [6] N. Mohanapriya, K. Kalaiselvi, V. Aparna, I. Agustin, *et al.*, "On r -dynamic coloring of central vertex join of path, cycle with certain graphs," in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 2157, p. 012007, IOP Publishing, 2022. [View online](#).
- [7] J. Zhu and Y. Bu, "List r -dynamic coloring of graphs with small maximum average degree," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 258, pp. 254–263, 2019. [View online](#).
- [8] A. Fierera and K. A. Sugeng, "Pewarnaan simpul r -dinamis pada graf teratai t_n ," in *Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology*, pp. 165–170, 2021. [View online](#).
- [9] G. Nandini, M. Venkatachalam, and R. M. Falcón Ganfornina, "On the r -dynamic coloring of subdivision-edge coronas of a path," *AIMS Mathematics*, 5 (5), 4546-4562., 2020. [View online](#).
- [10] R. Riba'ah, A. Kristiana, I. Maylisa, *et al.*, "On the r -dynamic chromatic number of subdivision of wheel graph," in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 2157, p. 012016, IOP Publishing, 2022. [View online](#).
- [11] A. I. Kristiana, M. I. Utoyo, D. Dafik, R. Alfarisi, and E. Waluyo, "On the r -dynamic chromatic number of corona product of star graph," *Thai Journal of Mathematics*, vol. 20, no. 3, pp. 1389–1397, 2022. [View online](#).

Format Sitasi IEEE:

N. Kusumawati, A. I. Kristiana, R. Alfarisi, R. Adawiyah, dan T. B. Setiawan, "Pewarnaan Titik r -Dinamis pada Graf Cricket", *Jurnal Diferensial*, vol. 6(1), pp. 29-39, 2024.

This work is licensed under a [Creative Commons "Attribution-ShareAlike 4.0 International"](#) license.

