J. DIFERENSIAL/E-ISSN:2775-9644
Vol.5(2),2023, 117–125
doi:https://doi.org/10.35508/jd.v5i2.12197

ARTIKEL PENELITIAN

Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal pada Hasil Operasi Subdivisi Graf Helm

Ilmiatun Nuroeni[1], Arika Indah Kristiana[1,*], Saddam Hussen[1], Susi Setiawani[1], Robiatul Adawiyah[1]

[1]*Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember, Jember-Jawa Timur, Indonesia*
[*]*Penulis korespondensi: arika.fkip@unej.ac.id*

Diterima: 29 Juli 2023; Direvisi: 31 Agustus 2023; Disetujui: 18 September 2023; Dipublikasi:20 Oktober 2023.

Abstrak: Salah satu subbab yang dipelajari dalam graf adalah pewarnaan graf. Definisi dari pewarnaan ketakteraturan lokal, yaitu : $(i) l : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ merupakan pelabelan titik ketakteraturan dan $w : V(G) \rightarrow N$, untuk setiap $uv \in E(G), w(u) \neq w(v)$ dengan $w(u) = \sum_{(v \in N(u))} l(v)$ dan (i) Opt$(l) = \min\{\max(l_i); l_i$ pelabelan titik ketakteraturan$\}$. Bilangan kromik dari pewrnaan titik ketakteraturan lokal dinotasikan dengan $\chi_{lis}(G)$. Bilangan kromatik merupakan warna minimum yang digunakan dalam pewarnaan titik ketakteraturan lokal. Artikel ini akan dibahas tentang pewarnaan titik ketakteraturan loal pada graf hasil operasi subdivisi graf helm (graf $S_g(H_n)$).

Kata Kunci: Pewarnaan titik, Ketakteraturan lokal, Subdivisi, Graf helm

Abstract: One of the sub-chapters studied in graphs is local irregularity vertex coloring of graph. The based on definition of local irregularity vertex coloring of graph, as follow : $(i) l : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ as a vertex irregular labeling and $w : V(G) \rightarrow N$, for every $uv \in E(G), w(u) \neq w(v)$ with $w(u) = \sum_{v \in N(u)} l(v)$ and (i) Opt$(l) = \min\{\max(l_i); l_i$ is a vertex irregular labeling$\}$. The chromatic number of the local irregularity vertex coloring of G denoted by $\chi_{lis}(G)$, is the minimum cardinality of the largest label over all such local irregularity vertex colorings. In this article, discuss about local irregularity vertex coloring of subdivision by helm graph $(S_g(H_n))$.

Keywords: Vertex coloring, local irregularity, Subdivision, Helm graph

1. Pendahuluan

Graf merupakan ilmu terapan dari ilmu matematika. Teori Graf pertama kali muncul oleh matematikawan asal Swiss yaitu Leonhard Euler dalam menyelesaikan permasalahan Jembatan Konigsberg. Daniel dan Taneo [1] menyebutkan bahwa graf digunakan untuk menggambarkan objek-objek diskrit dan keterkaitannya antar objek-objek tersebut. Suatu graf adalah himpunan titik dan sisi dengan himpunan titik merupakan himpunan kosong berhingga dan sisi merupakan himpunan berhingga (boleh kosong) dari pasangan titik [2–6]. Salah satu subbab yang dipelajari dalam graf adalah pewarnaan graf. Pewarnaan sendiri ada tiga jenis yaitu pewarnaan titik, pewarnan sisi dan pewarnaan wilayah. Pewarnaan titik pada graf adalah memberikan warna berbeda pada titik yang saling bertetangga [7–9]. Banyaknya warna minimum yang digunakan dalam pewarnaan graf disebut sebagai bilangan kromatik [10–12]. Banyak ilmuwan mengembangkan tentang pewarnaan salah satunya adalah pewarnaan titik ketakteraturan lokal. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal adalah meminimalkan label titik dan meminimalkan jumlah warna titik pada suatu graf G yang merupakan kombinasi dari pelabelan ketakteraturan dan pewarnaan titik [8]. Berikut ini definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal oleh Kristiana [10]:

Definisi 1.1. Misalkan $l : V(G) \to \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ dengan l merupakan fungsi pelabelan titik dan $w : V(G) \to N$ didefinisikan sebagai $w(u) = \sum_{v \in N(u)} l(v)$ dengan w merupakan fungsi bobot. Fungsi w disebut pewarnaan titik ketakteraturan lokal, jika :

a. Opt$(l) = \min\{\max(l_i); l_i$ fungsi label$\}$
b. Untuk setiap $uv \in E(G), w(u) \neq w(v)$.

Definisi 1.2. Bilangan kromatik ketakteraturan lokal yang dinotasikan dengan $\chi_{lis}(G)$ didefinisikan sebagai $\chi_{lis}(G) = \min\{|w(V(G))|\}$; dengan w merupakan pewarnaan titik ketakteraturan lokal.

Lemma 1.1. Untuk graf G sederhana dan terhubung $\chi_{lis}(G) \geq \chi(G)$.

Observasi 1.1. Graf terhubung G, apabila suatu titik yang berdekatan memiliki derajat yang berbeda, maka $opt(l) = 1$.

Observasi 1.2. Graf terhubung G, apabila suatu titik yang berdekatan memiliki derajat yang sama, maka $opt(l) \geq 2$.

2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik dan pendeteksian pola. Metode deduktif aksiomatik adalah metode penelitian menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang ada kemudian diterapkan dalam pembuktian pewarnaan titik ketakteraturan lokal hasil operasi subdivisi graf helm. Metode pendeteksian pola adalah mencari pola dari bilangan kromatik dari graf $S_g(H_n)$.

3. Hasil dan Pembahasan

Teorema 3.1. *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf subdivisi $S_g(H_n)$ untuk $n \geq 3$ adalah*

$$\chi_{lis}(S_g(H_n)) = \begin{cases} 5, & \textit{untuk } n = 4, 6 \\ 6, & \textit{untuk } n = 3, 5 \\ & \textit{untuk } n = 0 (\mod 2); n \geq 8 \\ 7, & \textit{untuk } n = 1 (\mod 2); n \geq 7 \end{cases}$$

Bukti. Graf subdivisi $S_g(H_n)$ memiliki himpunan titik dan sisi yaitu $V(S_g(H_n)) = \{x\} \cup \{x_{1,i}, y_i, x_{2,i}; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(S_g(H_n)) = \{xy_i, y_i x_{1,i}, x_{1,i}x_{1,i+1}, x_{1,i}x_{2,i}; 1 \leq i \leq n\}$. Sehingga jumlah titiknya adalah $|V(S_g(H_n))| = 3n+1$ dan jumlah sisinya $|E(S_g(H_n))| = 4n$, untuk $n \geq 3$. Pembuktian selanjutnya dibagi menjadi empat kasus yaitu :
Kasus 1. Untuk $n = 4, 6$
Pada graf $S_g(H_n)$ terdapat titik yang bertetangga memiliki derajat sama contohnya titik $x_{1,1}$ dan $x_{1,2}$, maka sesuai dengan Observasi 1.2 diperoleh nilai optimum dari fungsi label yaitu $opt(l) \geq 2$. Selanjutnya, akan dibuktikan batas bawah dari bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan

Tabel 3.1: Kemungkinan Bobot Titik Graf $S_g(H_n)$

x	$d(x)$	$w(x)$
$x_{2,1}, 1 \leq i \leq n$	1	$1 \leq w(x_{2,1}) \leq 2$
$y_i, 1 \leq i \leq n$	2	$1 \leq w(y_i) \leq 4$
$x_{1,1}, 1 \leq i \leq n$	4	$1 \leq w(x_{1,1}) \leq 8$
x	n	$1 \leq w(x) \leq 2n$

lokal. Sesuai Lemma 1.1 diperoleh $\chi_{lis}(S_g(H_n)) \geq \chi(S_g(H_n)) = 3$. Asumsikan $\chi_{lis}(S_g(H_n)) = 4$ dan pada graf $S_g(H_n)$ diketahui memiliki 4 macam derajat titik. Berikut ini adalah tabel kemungkinan bobot titik saat $n = 4, 6$ dengan $opt(l) = 2$.

Apabila $x_{2,i}, x_{1,i}, y_i, x \in V(S_g(H_n))$ dilabeli dengan 1 dan 2 maka diperoleh kemungkinan bobot titik sebagai berikut :

a. Jika $l(x_{2,i}) = 1; l(y_i) = 1; l(x_{1,i}) = 1; l(x) = 2$ untuk $1 \leq i \leq n$ maka $w(x_{1,1}) = w(x_{1,2})$.
b. Jika $l(x_{2,i}) = 1; l(x_{1,i}) = 1$ untuk $i \equiv 1(\mod 2); l(x_{1,i}) = 1$ untuk $i \equiv 0(\mod 2); l(y_i) = 1; l(x) = 1$ maka warna titik lebih dari 4.
c. $Jikal(x_{2,i}) = 1; l(x_{1,i}) = 1$ untuk $i \equiv 1(\mod 2); l(x_{1,i}) = 1$ untuk $i \equiv 0(\mod 2); l(y_i) = 1; l(x) = 2$ maka $w(x) = w(y_2)$.

Berdasarkan pernyataan diatas terdapat warna titik lebih dari 4 pada titik $x_{2,i}, x_{1,i}, y_i, x \in V(S_g(H_n))$. Selanjutnya, pilih titik $w(x_{1,i})$ dan $w(x_{1,i+1})$,

$$w(x_{1,i}) = l(x_{2,i}) + l(x_{1,i+1}) + l(y_i) + l(x_{1,n}) = 1 + 2 + 1 + 2 = 6 \tag{3.1}$$

$$w(x_{1,i+1}) = l(x_{2,i+1}) + l(x_{1,i+2}) + l(y_i) + l(x_{1,i}) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \tag{3.2}$$

Berdasarkan Persamaan 3.1 dan 3.2, didapatkan $w(x_{1,i}) \neq w(x_{1,i+1})$ memenuhi Definisi 1.1. Jadi, batas bawah dari graf $S_g(H_n)$ pada saat $n = 4, 6$ adalah $\chi_{lis}(S_g(H_n)) \geq 5$.

Selanjutnya, akan dibuktikan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf $S_g(H_n)$. Berikut ini fungsi label yang didefinisikan $l : V(S_g(H_n)) \to \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned}
l(x_{2,1}) &= 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
l(x_{1,i}) &= \begin{cases} 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n; i = 1(\mod 2) \\ 2, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n-1; i = 0(\mod 2) \end{cases} \\
l(y_i) &= 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
l(x) &= 1
\end{aligned}$$

Dari fungsi label tersebut dengan $opt(l) = 2$, didapatkan fungsi bobot sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
w(x_{2,1}) &= \begin{cases} 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1; i \equiv 0(\mod 2) \\ 2, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n; i \equiv 0(\mod 2) \end{cases} \\
w(x_{1,i}) &= \begin{cases} 4, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n; i \equiv 1(\mod 2) \\ 6, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1; i \equiv 0(\mod 2) \end{cases} \\
w(y_i) &= \begin{cases} 2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1; i \equiv 0(\mod 2) \\ 3, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n; i \equiv 0(\mod 2) \end{cases} \\
w(x) &= 4, 6
\end{aligned}$$

Himpunan bobot titik graf $S_g(H_n)$ yaitu $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, maka batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal yaitu $\chi_{lis}(S_g(H_n)) \leq |w(V(S_g(H_n)))| = 5$. Jadi, dari batas bawah dan batas atas

diperoleh $5 \leq \chi_{lis}(S_g(H_n)) \leq 5$, maka bilangan kromatik dari graf $S_g(H_n)$ adalah $\chi_{lis}(S_g(H_n)) = 5$ pada saat $n = 4, 6$.
Kasus 2. Untuk $n = 3, 5$
Pada graf $S_g(H_n)$ terdapat titik yang bertetangga memiliki derajat sama contohnya titik $x_{1,1}$ dan $x_{1,2}$, maka sesuai dengan Observasi 1.2 diperoleh nilai maksimum dari fungsi label yaitu $opt(l) \geq 2$. Selanjutnya, akan dibuktikan batas bawah dari bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal. Sesuai dengan Lemma 1.1, diperoleh $\chi_{lis}(S_g(H_n)) \geq \chi(S_g(H_n)) = 3$. Asumsikan $\chi_{lis}(S_g(H_n)) = 5$. Berikut ini tabel kemungkinan bobot titik saat $n = 3, 5$ dengan $opt(l) = 2$.

Tabel 3.2: Kemungkinan Bobot Titik Graf $S_g(H_n)$

x	$d(x)$	$w(x)$
$x_{2,1}, 1 \leq i \leq n$	1	$1 \leq w(x_{2,1}) \leq 2$
$y_i, 1 \leq i \leq n$	2	$1 \leq w(y_i) \leq 4$
$x_{1,1}, 1 \leq i \leq n$	4	$1 \leq w(x_{1,1}) \leq 8$
x	n	$1 \leq w(x) \leq 2n$

Apabila $x_{2,i}, x_{1,i}, y_i, x \in V(S_g(H_n))$ dilabeli dengan 1 dan 2 maka diperoleh kemungkinan bobot titik sebagai berikut :

a. Jika $l(x_{2,i}) = 1; l(y_i) = 1; l(x_{1,i}) = 1; l(x) = 2$ untuk $1 \leq i \leq n$ maka $w(x_{1,1}) = w(x_{1,2})$.
b. Jika $l(x_{2,i}) = 1; l(x_{1,i}) = 1$ untuk $i \equiv 1(\mod 2); l(x_{1,i}) = 2$ untuk $i \equiv 0(\mod 2); l(y_i) = 1; l(x) = 1$ maka $w(x_{1,i}) = w(x_{1,n})$.
c. $Jikal(x_{2,i}) = 1; l(x_{1,i}) = 1$ untuk $i \equiv 1(\mod 2); l(x_{1,i}) = 2$ untuk $i \equiv 0(\mod 2); l(y_i) = 2$ untuk $i = n; l(x) = 1$ maka warna titik lebih dari 5.
d. Jika $l(x_{2,i}) = 1; l(x_{1,i}) = 2$ untuk $i \equiv 1(\mod 2); l(x_{1,i}) = 1$ untuk $i \equiv 0(\mod 2); l(y_i) = 1; l(y_i) = 2$ untuk $i = n; l(x) = 2$ maka $w(x) = w(y_2)$ saat $n = 3$.

Berdasarkan pernyataan diatas terdapat 6 warna pada titik $x_{2,i}, x_{1,i}, y_i, x \in V(S_g(H_n))$. Selanjutnya, pilih titik $w(x_{1,i})$ dan $w(x_{1,i+1})$,

$$w(x_{1,i}) = l(x_{2,i}) + l(x_{1,i+1}) + l(y_i) + l(x_{1,n}) = 1 + 2 + 1 + 2 = 6 \tag{3.3}$$
$$w(x_{1,i+1}) = l(x_{2,i+1}) + l(x_{1,i+2}) + l(y_i) + l(x_{1,i}) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \tag{3.4}$$

Berdasarkan Persamaan 3.3 dan 3.4, didapatkan $w(x_{1,i}) \neq w(x_{1,i+1})$ memenuhi Definisi 2.5.1. Jadi, batas bawah dari graf $S_g(H_n)$ pada saat $n = 3, 5$ adalah $\chi_{lis}(S_g(H_n)) \geq 6$.

Selanjutnya, akan dibuktikan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf $S_g(H_n)$. Berikut ini fungsi label yang didefinisikan $l : V(S_g(H_n)) \to \{1, 2\}$:

$$l(x_{2,1}) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$
$$l(x_{1,i}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n; i = 1(\mod 2) \\ 2, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n-1; i = 0(\mod 2) \end{cases}$$
$$l(y_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ 2, & \text{untuk } i = n \end{cases}$$
$$l(x) = 1$$

Dari fungsi label tersebut dengan $opt(l) = 2$, didapatkan fungsi bobot sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
w(x_{2,1}) =& 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
w(x_{1,i}) =& \begin{cases} 4, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n; i \equiv 0(\mod 2) \\ 5, & \text{untuk } i = 1 \\ 6, & \text{untuk } 3 \leq i \leq n-1; i \equiv 1(\mod 2) \end{cases} \\
w(y_i) =& \begin{cases} 2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1; i \equiv 0(\mod 2) \\ 3, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n; i \equiv 0(\mod 2) \end{cases} \\
w(x) =& 4, 6
\end{aligned}
$$

Berdasarkan fungsi bobot tersebut diperoleh himpunan bobot titik yaitu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, maka batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal yaitu $\chi_{lis}(S_g(H_n)) \leq |w(V(S_g(H_n)))| = 6$. Jadi, berdasarkan batas atas dan batas bawah diperoleh $6 \leq \chi_{lis}(S_g(H_n)) \leq 6$, maka bilangan kromatik dari graf $S_g(H_n)$ adalah $\chi_{lis}(S_g(H_n)) = 6$ pada saat $n = 3, 5$

Kasus 3. Untuk $n \equiv 0(\mod 2); n \geq 8$

Pada graf $S_g(H_n)$ terdapat titik yang bertetangga memiliki derajat sama contohnya titik $x_{1,1}$ dan $x_{1,2}$, maka sesuai dengan Observasi 1.2 diperoleh nilai maksimum dari fungsi label yaitu opt$(l) \geq 2$. Selanjutnya, akan dibuktikan batas bawah dari bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal. Sesuai dengan Lemma 1.1, diperoleh $\chi_{lis}(S_g(H_n)) \geq \chi(S_g(H_n)) = 3$. Asumsikan $\chi_{lis}(S_g(H_n)) = 5$ dan pada graf $(S_g(H_n))$ diketahui memiliki 4 macam derajat titik. Berikut ini merupakan tabel kemungkinan bobot titik saat $n \equiv 0(\mod 2)$ dengan $opt(l) = 2$.

Tabel 3.3: Kemungkinan Bobot Titik Graf $S_g(H_n)$

x	$d(x)$	$w(x)$
$x_{2,1}, 1 \leq i \leq n$	1	$1 \leq w(x_{2,1}) \leq 2$
$y_i, 1 \leq i \leq n$	2	$1 \leq w(y_i) \leq 4$
$x_{1,1}, 1 \leq i \leq n$	4	$1 \leq w(x_{1,1}) \leq 8$
x	n	$1 \leq w(x) \leq 2n$

Apabila $x_{2,i}, x_{1,i}, y_i, x \in V(S_g(H_n))$ dilabeli dengan 1 dan 2 maka diperoleh kemungkinan bobot titik sebagai berikut :

a. Jika $l(x_{2,i}) = 1; l(y_i) = 1; l(x_{1,i}) = 1; l(x) = 2$ untuk $1 \leq i \leq n$ maka $w(x_{1,1}) = w(x_{1,2})$.
b. Jika $l(x_{2,i}) = 1; l(x_{1,i}) = 1$ untuk $i \equiv 1(\mod 2); l(x_{1,i}) = 1$ untuk $i \equiv 0(\mod 2); l(y_i) = 1; l(x) = 1$ maka warna titik lebih dari 5.
c. Jika $l(x_{2,i}) = 1; l(x_{1,i}) = 1$ untuk $i \equiv 1(\mod 2); l(x_{1,i}) = 1$ untuk $i \equiv 0(\mod 2); l(y_i) = 1; l(x) = 2$ maka warna titik lebih dari 5.

Berdasarkan pernyataan diatas terdapat 6 warna pada titik $x_{2,i}, x_{1,i}, y_i, x \in V(S_g(H_n))$. Selanjutnya, pilih titik $w(x_{1,i})$ dan $w(x_{1,i+1})$,

$$w(x_{1,i}) = l(x_{2,i}) + l(x_{1,i+1}) + l(y_i) + l(x_{1,n}) = 1 + 2 + 1 + 1 = 5 \tag{3.5}$$

$$w(x_{1,i+1}) = l(x_{2,i+1}) + l(x_{1,i+2}) + l(y_i) + l(x_{1,i}) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \tag{3.6}$$

Berdasarkan Persamaan 3.5 dan 3.6, didapatkan $w(x_{1,i}) \neq w(x_{1,i+1})$ memenuhi Definisi 2.5.1. Jadi, batas bawah dari graf $S_g(H_n)$ pada saat $n =\equiv (\mod 2); n \geq 8$ adalah $\chi_{lis}(S_g(H_n)) \geq 6$.

Selanjutnya, akan dibuktikan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf $S_g(H_n)$. Berikut ini fungsi label yang didefinisikan $l : V(S_g(H_n)) \to \{1,2\}$:

$$\begin{aligned}
l(x_{2,1}) =& 1, \text{ untuk } 1 \le i \le n\\
l(x_{1,i}) =& \begin{cases} 1, & \text{untuk } 1 \le i \le n; i = 1 (\mod 2)\\ 2, & \text{untuk } 2 \le i \le n-1; i = 0 (\mod 2)\end{cases}\\
l(y_i) =& 1, \text{ untuk } 1 \le i \le n\\
l(x) =& 1
\end{aligned}$$

Dari fungsi label tersebut dengan $opt(l) = 2$, didapatkan fungsi bobot sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
w(x_{2,1}) =& \begin{cases} 1, & \text{untuk } 1 \le i \le n-1; i \equiv 0 (\mod 2)\\ 2, & \text{untuk } 2 \le i \le n; i = 0 (\mod 2)\end{cases}\\
w(x_{1,i}) =& \begin{cases} 4, & \text{untuk } 2 \le i \le n; i \equiv 0 (\mod 2)\\ 6, & \text{untuk } 1 \le i \le n-1; i \equiv 1 (\mod 2)\end{cases}\\
w(y_i) =& \begin{cases} 2, & \text{untuk } 1 \le i \le n-1; i \equiv 1 (\mod 2)\\ 3, & \text{untuk } 2 \le i \le n; i \equiv 0 (\mod 2)\end{cases}\\
w(x) =& n
\end{aligned}$$

Berdasarkan fungsi bobot tersebut diperoleh himpunan bobot titik yaitu $\{1,2,3,4,5,6,n\}$, maka batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal yaitu $\chi_{lis}(S_g(H_n)) \le |w(V(S_g(H_n)))| = 6$. Jadi, berdasarkan batas atas dan batas bawah diperoleh $6 \le \chi_{lis}(S_g(H_n)) \le 6$, maka bilangan kromatik dari graf $S_g(H_n)$ adalah $\chi_{lis}(S_g(H_n)) = 6$ pada saat $n \equiv 0 (\mod 2); n \ge 8$

Kasus 4. Untuk $n \equiv 1 (\mod 2); n \ge 7$

Pada graf $S_g(H_n)$ terdapat titik yang bertetangga memiliki derajat sama contohnya titik $x_{1,1}$ dan $x_{1,2}$, maka sesuai dengan Observasi 1.2 diperoleh nilai maksimum dari fungsi label yaitu opt$(l) \ge 2$. Selanjutnya, akan dibuktikan batas bawah dari bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal. Sesuai dengan Lemma 1.1, diperoleh $\chi_{lis}(S_g(H_n)) \ge \chi(S_g(H_n)) = 3$. Asumsikan $\chi_{lis}(S_g(H_n)) = 6$ dan pada graf $(S_g(H_n))$ diketahui memiliki 4 macam derajat titik. Berikut ini merupakan tabel kemungkinan bobot titik saat $n \equiv 0 (\mod 2); n \ge 7$ dengan $opt(l) = 2$.

Tabel 3.4: Kemungkinan Bobot Titik Graf $S_g(H_n)$

x	$d(x)$	$w(x)$
$x_{2,1}, 1 \le i \le n$	1	$1 \le w(x_{2,1}) \le 2$
$y_i, 1 \le i \le n$	2	$1 \le w(y_i) \le 4$
$x_{1,1}, 1 \le i \le n$	4	$1 \le w(x_{1,1}) \le 8$
x	n	$1 \le w(x) \le 2n$

Apabila $x_{2,i}, x_{1,i}, y_i, x \in V(S_g(H_n))$ dilabeli dengan 1 dan 2 maka diperoleh kemungkinan bobot titik sebagai berikut :

a. Jika $l(x_{2,i}) = 1; l(y_i) = 1; l(x_{1,i}) = 1; l(x) = 2$ untuk $1 \le i \le n$ maka $w(x_{1,1}) = w(x_{1,2})$.
b. Jika $l(x_{2,i}) = 1; l(x_{1,i}) = 1$ untuk $i \equiv 1 (\mod 2); l(x_{1,i}) = 1$ untuk $i \equiv 0 (\mod 2); l(y_i) = 1; l(x) = 1$ maka $w(x_{1,1}) = w(x_{1,2})$.
c. Jika $l(x_{2,i}) = 1; l(x_{1,i}) = 1$ untuk $i \equiv 1 (\mod 2); l(x_{1,i}) = 1$ untuk $i \equiv 0 (\mod 2); l(y_i) = 1; l(x) = 2$ untuk $i = n; l(x) = 1$ maka warna titik lebih dari 6.
d. Jika $l(x_{2,i}) = 1; l(x_{1,i}) = 1$ untuk $i \equiv 1 (\mod 2); l(x_{1,i}) = 1$ untuk $i \equiv 0 (\mod 2); l(y_i) = 1; l(x) = 2$ untuk $i = n; l(x) = 2$ maka $w(x) = w(y_2)$ saat $n = 3$.

Berdasarkan pernyataan diatas terdapat 7 warna pada titik $x_{2,i}, x_{1,i}, y_i, x \in V(S_g(H_n))$. Selanjutnya, pilih titik $w(x_{1,i})$ dan $w(x_{1,i+1})$,

$$w(x_{1,i}) = l(x_{2,i}) + l(x_{1,i+1}) + l(y_i) + l(x_{1,n}) = 1 + 2 + 1 + 1 = 5 \quad (3.7)$$
$$w(x_{1,i+1}) = l(x_{2,i+1}) + l(x_{1,i+2}) + l(y_i) + l(x_{1,i}) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \quad (3.8)$$

Berdasarkan Persamaan 3.7 dan 3.8, didapatkan $w(x_{1,i}) \neq w(x_{1,i+1})$ memenuhi Definisi 2.5.1. Jadi, batas bawah dari graf $S_g(H_n)$ pada saat $n = \equiv (\mod 2); n \geq 7$ adalah $\chi_{lis}(S_g(H_n)) \geq 7$.

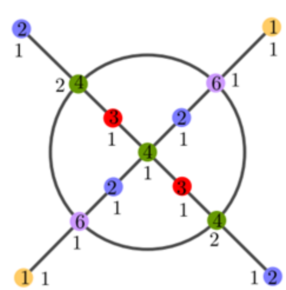
Selanjutnya, akan dibuktikan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf $S_g(H_n)$. Berikut ini fungsi label yang didefinisikan $l : V(S_g(H_n)) \rightarrow \{1, 2\}$:

$$l(x_{2,1}) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$
$$l(x_{1,i}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n; i = 1(\mod 2) \\ 2, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n-1; i = 0(\mod 2) \end{cases}$$
$$l(y_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1 \\ 2, & \text{untuk } i = n \end{cases}$$
$$l(x) = 1$$

Dari fungsi label tersebut dengan $opt(l) = 2$, didapatkan fungsi bobot sebagai berikut :

$$w(x_{2,1}) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$
$$w(x_{1,i}) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n; i \equiv 0(\mod 2) \\ 5, & \text{untuk } i = 1 \\ 6, & \text{untuk } 3 \leq i \leq n-1; i \equiv 1(\mod 2) \end{cases}$$
$$w(y_i) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1; i \equiv 1(\mod 2) \\ 3, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n; i \equiv 0(\mod 2) \end{cases}$$
$$w(x) = n$$

Berdasarkan fungsi bobot tersebut diperoleh himpunan bobot titik yaitu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, n\}$, maka batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal yaitu $\chi_{lis}(S_g(H_n)) \leq |w(V(S_g(H_n)))| = 7$. Jadi, berdasarkan batas atas dan batas bawah diperoleh $7 \leq \chi_{lis}(S_g(H_n)) \leq 7$, maka bilangan kromatik dari graf $S_g(H_n)$ adalah $\chi_{lis}(S_g(H_n)) = 7$ pada saat $n \equiv 0(\mod 2); n \geq 7$. Berikut adalah contoh gambar pewarnaan titik ketakteraturan lokal $S_g(H_4)$.



Gambar 3.1: Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal pada Graf $S_g(H_4)$

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh teorema baru tentang bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf hasil operasi sudivisi graf helm, yaitu : Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf subdivisi $S_g(H_n)$ untuk $n \geq 3$ adalah

$$\chi_{lis}(S_g(H_n)) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } n = 4, 6 \\ 6, & \text{untuk } n = 3, 5 \\ & \text{untuk } n \equiv 0 \mod 2; n \geq 8 \\ 7, & \text{untuk } n \equiv 0(\mod 2); n \geq 7 \end{cases}$$

5. Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan mengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada hasil operasi subdivisi graf helm, untuk penelitian selanjutnya disarankan melakukan penelitian serupa untuk jenis graf lainnya terutama graf hasil operasi subdivisi .

Referensi

[1] F. Daniel and P. Taneo, *Teori Graf*. Deepublish, 2019. View online.

[2] N. Azahra, A. I. Kristiana, Dafik, and R. Alfarisi, "On the local irregularity vertex coloring of related grid graph," *International Journal of Academic and Applied Research*, vol. 4, no. 2, pp. 1–4, 2020. View online.

[3] N. Kabang, Y. Yundari, and F. Fran, "Bilangan kromatik lokasi pada graf bayangan dan graf middle dari graf bintang," *Bimaster:Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, vol. 9, no. 2, pp. 329–336, 2020. View online.

[4] A. I. Kristiana, R. Alfarisi, Dafik, Kristiana, and N. Azahra, "Local irregular vertex coloring of some families graph," *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, vol. 25, no. 1, pp. 15–30, 2022. View online.

[5] A. I. Kristiana, N. Nikmah, Dafik, R. Alfarisi, M. A. Hasan, and Slamin., "On the local irregularity vertex coloring of volcano, broom, parachute, double broom and complete multipartite graphs," *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, vol. 14, no. 06, p. 2250022, 2022. View online.

[6] R. Z. RibaÁh, Dafik, A. Kristiana, I. N. Maylisa, and Slamin, "On the r-dynamic chromatic number of subdivision of wheel graph," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 2157, no. 1, 2022. View online.

[7] X. Liu and P. Lu, "Spectra of subdivision-vertex and subdivision-edge neighbourhood coronae," *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 438, no. 8, pp. 3547–3559, 2013. View online.

[8] K. Munawaroh, A. I. Kristiana, E. R. Albirri, D. Dafik, and R. Adawiyah, "Pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada keluarga graf unicyclic," *Cgant Journal of Mathematics and Applications*, vol. 2, no. 2, pp. 6–21, 2022. View online.

[9] H. S. Ramane, V. V. Manjalapur, and I. Gutman, "General sum-connectivity index, general product-connectivity index, general zagreb index and coindices of line graph of subdivision graphs," *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, vol. 14, no. 1, pp. 92–100, 2020. View online.

[10] A. Kristiana, M. I. Utoyo, Dafik, I. Agustin, R. Alfarisi, and E. Waluyo, "On the chromatic number local irregularity of related wheel graph," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1211, no. 1, 2019. View online.

[11] A. Iriawan, A. Asmiati, L. Zakaria, K. Muludi, and B. H. S. Utami, “Bilangan kromatik lokasi subdivisi operasi barbel tertentu graf origami $\mathbf{B}^s_{0_3}$, $\mathbf{B}^s_{0_4}$, $\mathbf{B}^s_{0_5}$, $\mathbf{B}^s_{0_6}$,” *Jurnal Siger Matematika*, vol. 2, no. 2, pp. 52–56, 2021. View online.

[12] K. Sankar and G. Sethuraman, “Graceful and cordial labeling of subdivision of graphs,” *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, vol. 53, pp. 123–131, 2016. View online.

Format Sitasi IEEE:
I. Nuroeni, A. I. Kristiana, S. Hussen, S. Setiawani, R. Adawiyah, *"Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal pada Hasil Operasi Subdivisi Graf Helm"*, *Jurnal Diferensial*, vol. 5(2), pp. 117-125,2023.