J. Diferensial/e-ISSN:2775-9644
Vol.5(2),2023, 126–134 doi:https://doi.org/10.35508/jd.v5i2.12462

Artikel Penelitian

Indeks Topologi dari Graf Koprima untuk Grup Dihedral dengan Orde Pangkat Prima

Marena Rahayu Gayatri[1], Rifdah Fadhilah[1], Sahin Two Lestari[1], Lia Fitta Pratiwi[1], Abdurahim[1], I Gede Adhitya Wisnu Wardhana[1,*]

[1]*Departement of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Universitas Mataram, Mataram, Nusa Tenggara Barat, Indonesia*
[*]*Penulis korespondensi: adhitya.wardhana@unram.ac.id*

Diterima: 25 Agustus 2023; Direvisi: 10 September 2023; Disetujui: 11 September 2023; Dipublikasi:20 Oktober 2023.

Abstrak: Dalam ilmu molekul kimia, teori graf digunakan untuk merepresentasikan bentuk suatu molekul, dimana himpunan simpul merupakan unsur kimianya dan himpunan sisi merupakan ikatan pada molekul kimia. Teori graf dalam ilmu matematika diterapkan dalam berbagai hal, salah satunya pada representasi grup. Penelitian ini akan membahas mengenai indeks topologi dari graf koprima dari grup dihedral. Adapun metode yang digunakan adalah dengan membaca beberapa referensi terkait dengan grup dihedral, graf koprima, dan indeks topologi. Pada studi ini didapatkan hasil-hasil berupa indeks Harmonik, indeks Harary, indeks Zagreb pertama, indeks Gutman, dan indeks Weiner.

Kata Kunci: Grup Dihedral, Graf Koprima, Indeks Topologi

Abstract: In the field of molecular chemistry, graph theory is utilized to represent the structure of a molecule, where the set of nodes corresponds to its chemical elements and the set of edges represents the bonds within the chemical molecule. Graph theory, a mathematical discipline, finds application in various domains, one of which is group representation. This research will delve into the topic of the topological indices of the coprime graph of dihedral groups. The methodology employed involves reviewing several references related to dihedral groups, coprime graphs, and topological indices. This study yields results in the form of Harmonic index, Harary index, first Zagreb index, Gutman index, and Wiener index.

Keywords: Dihedral Group, Coprime Graph, Topological Indices

1. Pendahuluan

Dalam ilmu kimia, indeks topologi digunakan untuk merepresentasikan bentuk suatu molekul, di mana himpunan simpul merupakan unsur kimianya dan himpunan sisi merupakan ikatan pada molekul kimia. Hal penting di mana konektivitas ikatan atom bergantung pada indeks topologi suatu graf [1]. Indeks topologi suatu graf adalah bilangan yang invarian di bawah automorfisme graf. Indeks topologi berbasis derajat, berbasis jarak, dan berbasis eksentrisitas adalah tiga klasifikasi utama oleh [2].

Teori graf juga sering diterapkan dalam ilmu matematika. Beberapa jenis graf yang sering diterapkan dalam ilmu matematika seperti graf invers, graf identitas, graf koprima, graf non-koprima, graf commuting, graf non-commuting, dan graf-graf lainnya. Graf-graf tersebut digunakan untuk merepresentasikan grup, sehingga teori graf dan teori grup sering dikombinasikan dalam penelitian. Dalam penelitian ini, dibahas mengenai representasi grup dihedral pada graf koprima. Graf koprima merupakan graf yang dibangun secara hingga dengan simpul yang terdiri atas semua elemen di G dan dua simpul dikatakan bertetangga jika memiliki orde yang relatif prima. Penelitian mengenai graf koprima dari grup dihedral telah dilakukan pada beberapa studi [3–5] mengenai graf koprima dari grup generalized quarternion. Penerapan teori graf lebih lanjut pada ilmu matematika adalah dalam menentukan indeks topologi. Penelitian tentang indeks topologi telah dilakukan oleh [6–8] yang membahas indeks harmonik, indeks Zagreb, indeks Weiner dan indeks Gutman dari graf koprima maupun graf pangkat dari grup dihedral, grup quternion yang diperumum atau grup bilangan bulat modulo.

Pada penelitian ini akan dibahas mengenai beberapa indeks topologi dari graf koprima dari grup dihedral dengan orde bilangan prima berpangkat. Adapun indeks topologi yang dibahas lebih lanjut adalah indeks Harmonik, Harary, Zagreb pertama, Gutman, dan Wiener.

2. Metode Penelitian

Jenis penelitian dalam artikel ini adalah kajian pustaka (studi literatur) yaitu penelitian yang dilakukan dengan mempelajari berbagai referensi dengan judul yang diangkat oleh penulis. Penelitian dilakukan dengan membaca, mengkaji, dan memahami referensi yang berasal dari buku maupun sumber bacaan yang lain seperti jurnal, makalah-makalah yang memuat topik ataupun materi yang berkaitan dengan grup, grup dihedral, graf koprima, indeks topologi serta beberapa topik yang dibutuhkan untuk menunjang penelitian ini. Adapun langkah-langkah penelitian sebagai berikut:

1. Studi literatur yaitu mencari dan mempelajari sumber literatur yang berhubungan dengan grup, grup dihedral, graf, graf koprima, indeks topologi serta beberapa topik yang dibutuhkan untuk menunjang penelitian ini.
2. Menentukan orde dari setiap anggota grup dihedral agar diketahui informasi bentuk graf koprima.
3. Membentuk graf koprima dari grup dihedral.
4. Melakukan percobaan berdasarkan graf koprima dari grup didihedral menggunakan definisi dari beberapa indeks topologi yang telah ditentukan.
5. Membuat konjektur, yaitu menduga beberapa indeks topologi berdasarkan hasil percobaan yang dilakukan.
6. Membuktikan konjektur, yakni membuktikan dugaan sehingga didapatkan beberapa indeks topologi dari graf koprima dari grup dihedral.
7. Menarik kesimpulan dari penelitian yang sudah dilakukan.

3. Hasil dan Pembahasan

Penelitian ini membahas indeks Harmonik, indeks Harary, indeks Zagreb Pertama, indeks Gutman, dan indeks Weiner dari graf koprima dari grup dihedral. Suatu grup dengan $n \geq 3$ dan dibangun oleh elemen $a, b \in G$ sehingga $G = \{a, b | a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1}\}$ disebut Grup Dehidral $2n$, dinotasikan D_{2n}. Berikut definisi dari grup Dihedral dan graf koprima [9].

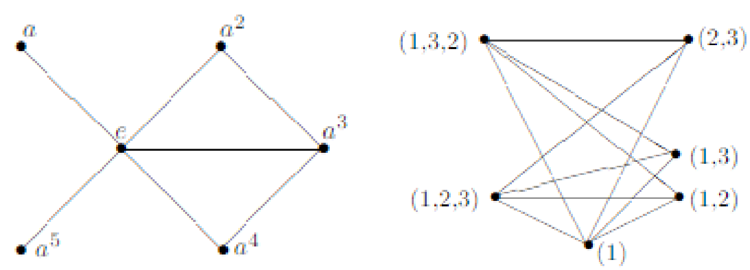
Definisi 3.1. Misalkan grup G dikatakan grup dihedral dengan orde $2n$, $n \geq 3$, dan $n \in \mathbb{N}$ adalah grup yang dibangun oleh elemen $a, b \in G$ yang dinotasikan dengan $G = \{a, b | a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1}\}$.

Misal diberikan G grup berhingga, maka dapat grup G dapat diasosiasikan dengan graf yang dinamakan graf koprima. Dimana semua elemen dari G menjadi simpul graf, lebih jauh, dua buah simpul yang berbeda disebut bertetangga apabila order dari dua buah simpul adalah satu atau relatif prima. Berikut diberikan definisi dari Graf Koprima.

Definisi 3.2. [10] Misalkan G grup hingga, graf koprima dari grup G yang dinotasikan dengan Γ_G adalah graf dengan simpul yang terdiri dari semua elemen dari G dengan dua simpul berbeda x dan y dari Γ_G dikatakan bertetangga apabila $(|x|, |y|) = 1$.

Contoh dari graf koprima dapat dilihat pada Gambar 1 di bawah ini. Gambar 3.1 (a) adalah graf koprima dari grup Z_6, yaitu Γ_{Z_6}. Sedangkan Gambar 3.1 (b) adalah graf koprima dari grup S_3, yaitu Γ_{S_3}

Gambar 3.1: Graf Koprima dari Z_6 dan S_3



(a) (b)

Derajat dari simpul suatu graf koprima dihedral memiliki karakteristik, sesuai dengan bentuk simpul. Karakteristik ini telah dilakukan oleh [11]. Lebih jelas, dapat dilihat pada Teorema 3.1.

Teorema 3.1. *Misalkan D_{2n} grup dihedral dengan $n \geq 3$. Jika n bilangan prima, maka derajat simpul dari graf koprima dari D_{2n} adalah*

a. $\deg_{D_{2n}}(a^i) = n + 1, \forall i \in \mathbb{Z}, 2 \leq i \leq n$
b. $\deg_{D_{2n}}(a^i b) = n, \forall i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n$
c. $\deg_{D_{2n}}(e) = 2n - 1$

Suatu graf dikatakan tripartit jika graf tersebut dapat dipartisi menjadi tiga subhimpunan partisi, di mana setiap simpul pada subhimpunan partisi tidak ada yang bertetangga, atau sebuah sisi selalu menghubungkan dua simpul dari submimpunan partisi yang berbeda. Dan graf dikatakan tripartit lengkap apabila setiap dua simpul dari dua subhimpunan partisi yang berbeda pasti bertetangga Selanjutnya pada graf koprima dari grup dihedral, terdapat suatu kondisi yang yang mengakibatkan graf yang terbentuk adalah tripartit lengkap. Graf koprima dari grup dihedral pasti membentuk graf tripartit lengkap apabila $n = p^k$ dengan p adalah bilangan prima yang tidak sama dengan 2. Lebih jauh, sifat ini dituangkan pada Teorema 3.2 sebagai berikut [3].

Teorema 3.2. *Misalkan $n = p^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$ dan p bilangan prima dengan $p \neq 2$ graf koprima dari D_{2n} adalah tripartit lengkap.*

Dalam hal ini, akan difokuskan pada penelitian tentang membahas indeks Harmonik, indeks Harary, indeks Zagreb pertama, indeks Gutman dan indeks Weiner. Teorema 3.1 dan Teorema 3.2 di atas akan digunakan dalam pembuktian karakteristik topologi indeks. Berikut diberikan definisi tentang indeks Harmonik.

Definisi 3.3. Indeks harmonik graf dinotasikan sebagai $H(G)$ didefinisikan sebagai

$$H(G) = \sum_{u,v \in E(G)} \frac{2}{\deg(u) + \deg(v)}$$

dengan $\deg(u)$ merupakan derajat simpul u yaitu banyaknya simpul $v \neq u$ yang bertetangga dengan simpul u.

Berikut diberikan contoh dari indeks Harmonik, di mana grupnya menggunakan grup dihedral.

Contoh 3.1. Misalkan Γ_{D_6} merupakan graf koprima dari D_6 dengan $D_6 = \{a, a^2, e, b, ab, a^2b\}$. Berdasarkan Teorema 3.1, graf yang terbentuk adalah graf tripartit lengkap. Akibatnya, derajat simpul e adalah 5. Selanjutnya, jika diperhatikan, derajat simpul dari unsur rotasi dan refleksi secara berturut–turut adalah 4 dan 5. Oleh karena itu, indeks harmonik dari Γ_{D_6} adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
H(\Gamma_{D_6}) = &\sum_{u,v \in E(G)} \frac{2}{\deg(u) + \deg(v)} \\
= &\frac{2}{\deg(e) + \deg(a)} + \frac{2}{\deg(e) + \deg(a^2)} + \frac{2}{\deg(e) + \deg(b)} + \frac{2}{\deg(e) + \deg(ab)} \\
&+ \frac{2}{\deg(e) + \deg(a^2b)} + \frac{2}{\deg(a) + \deg(b)} + \frac{2}{\deg(a) + \deg(ab)} + \frac{2}{\deg(a) + \deg(ab)} \\
&+ \frac{2}{\deg(a^2) + \deg(b)} + \frac{2}{\deg(a^2) + \deg(ab)} + \frac{2}{\deg(a^2) + \deg(ab)} \\
= &\frac{2}{5+4} + \frac{2}{5+4} + \frac{2}{5+3} + \frac{2}{5+3} + \frac{2}{5+3} + \frac{2}{4+3} + \frac{2}{4+3} + \frac{2}{4+3} + \frac{2}{4+3} + \frac{2}{4+3} \\
&+ \frac{2}{4+3} + \frac{2}{4+3} \\
= &\frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \\
= &2\left(\frac{2}{9}\right) + 3\left(\frac{2}{8}\right) + 6\left(\frac{2}{7}\right) \\
= &\frac{4}{9} + \frac{3}{4} + \frac{12}{7}
\end{aligned}$$

Berdasarkan Contoh 3.1, maka dapat mengkonstruksi indeks Harmoik graf koprima dari grup dihedral. Indeks Harmonik ini dapat dilihat pada Teorema 3.3 sebagai berikut.

Teorema 3.3. *Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima, $p \neq 2$ dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks harmonik dari graf koprima dari grup dihedral adalah*

$$H(\Gamma_{D_{2n}}) = \frac{2n-2}{3n} + \frac{2n}{3n-1} + \frac{2n^2-2n}{2n+1}$$

Bukti. Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf koprima dari grup dihedral. Ambil $n = p^k$ dengan p bilangan prima, $p \neq 2$ dan $k \in \mathbb{N}$. Diperoleh graf koprima dengan 3 partisi yakni $V_1 = \{e\}, V_2 = \{a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, dan $V_3 = \{b, ab, a^2b, \ldots, a^{n-1}b\}$. Berdasarkan Teorema 3.2, diperoleh derajat unsur pada V_1 adalah $2n-1$, derajat pada V_2 adalah $n+1$, dan derajat pada V_3 adalah n.

Sehingga, indeks harmonik dari $\Gamma_{D_{2n}}$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
H(G) = &\sum_{u,v \in E(G)} \frac{2}{\deg(u) + \deg(v)} \\
= &\sum_{v \in V_1, w \in V_2} \frac{2}{\deg(v) + \deg(w)} + \sum_{v \in V_1, w \in V_3} \frac{2}{\deg(v) + \deg(w)} + \sum_{v \in V_1, w \in V_2} \frac{2}{\deg(v) + \deg(w)}
\end{aligned}$$

Berdasarkan definisi grup dihedral dan Teorema 3.1, maka diperoleh jumlah pasangan simpul dari V_1 dan V_2 adalah $n-1$, jumlah pasangan simpul dari V_1 dan V_3 adalah n, dan jumlah pasangan simpul pada V_2 dan V_3 adalah $n(n-1)$ sehingga,

$$\begin{aligned}H(\Gamma_{D_{2n}}) =& \left((n-1)\left(\frac{2}{(2n-1)+(n+1)}\right)\right)+\left(n\left(\frac{2}{(2n-1)+n}\right)\right)+\left(n(n-1)\left(\frac{2}{(n+1)+n}\right)\right)\\ =&\frac{2n-2}{3n}+\frac{2n}{3n-1}+n^2-n\left(\frac{2}{2n+1}\right)\\ =&\frac{2n-2}{3n}+\frac{2n}{3n-1}+\frac{2n^2-2n}{2n+1}\end{aligned}$$

□

Selain indeks Harmonik, ada juga indeks Harary. Berikut diberikan definisi indeks Harary.

Definisi 3.4. [12] Misalkan G graf terhubung. Indeks Harary dari G dilambangkan dengan H(G) didefinisikan sebagai

$$\mathcal{H}(G)=\sum_{u,v\in V(G)}\frac{1}{d(u,v)}$$

Selanjutnya karakteristik dari indeks Harary graf koprima dari grup dihedral ditunjukkan pada teorema berikut.

Teorema 3.4. *Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf koprima dari grup dihedral. Jika $n=p^k$ dengan p bilangan prima, $p\neq 2$ dan $k\in\mathbb{N}$ maka Indeks Harary dari graf koprima dari grup dihedral adalah*

$$\mathcal{H}(\Gamma_{D_{2n}})=3n^2-5n+4$$

Bukti. Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf koprima dari grup dihedral. Ambil $n=p^k$ dengan p bilangan prima, $p\neq 2$ dan $k\in\mathbb{N}$. Diperoleh graf koprima dengan 3 partisi yakni $V_1=\{e\}, V_2=\{a,a^2,\dots,a^{n-1}\}$, dan $V_3=\{b,ab,a^2b,\dots,a^{n-1}b\}$. Berdasarkan Teorema 3.2, bahwa graf berbentuk tripartite lengkap, diperoleh jarak antar simpul-simpul subhimpunan partisi yang berbeda adalah satu, dan antar simpul-simpul pada partisi yang sama adalah dua. Sehingga, indeks harary dari $\Gamma_{D_{2n}}$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\Gamma_{D_{2n}}) =& \sum_{u,v\in V(G)}\frac{1}{d(u,v)}\\ =&\left[\sum_{v\in V_1,w\in V_2}\frac{1}{d(u,v)}+\sum_{v\in V_1,w\in V_3}\frac{1}{d(u,v)}+\sum_{v\in V_2,w\in V_3}\frac{1}{d(u,v)}+\sum_{v,w\in V_2}\frac{1}{d(u,v)}+\sum_{v,w\in V_3}\frac{1}{d(u,v)}\right]\end{aligned}$$

Berdasarkan definisi grup dihedral dan Teorema 3.2, maka diperoleh jumlah pasangan simpul pada V_1 dan V_2 adalah $n-1$, jumlah pasangan simpul pada V_1 dan V_3 adalah n, jumlah pasangan simpul pada V_2 dan V_3 adalah $n(n-1)$, dan jumlah pasangan simpul dari partisi yang sama adalah $C_2^(n-1)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ sehingga,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\Gamma_{D_{2n}}) =&[(1(n-1))+1(n)+1(n(n-1))+2C_2^{n-1}+1C_2^{n-1}]\\ =&[n^2+n+(n-1)(n-2)+(n-1)(n-2)]\\ =&[n^2+n+2(n^2-3n+2)]\\ =&3n^2-5n+4\end{aligned}$$

□

Selanjtunya diberikan definisi indeks Zagreb sebagai berikut.

Teorema 3.5. *Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima, $p \neq 2$ dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks zagreb pertama dari graf koprima dari grup dihedral adalah*

$$M_1(\Gamma_{D_{2n}}) = n(2n^2 + 5n - 5)$$

Bukti. Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf koprima dari grup dihedral. Ambil $n = p^k$ dengan p bilangan prima, $p \neq 2$ dan $k \in \mathbb{N}$. Diperoleh graf koprima dengan 3 partisi yakni $v_1 = \{e\}, v_2 = \{a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, dan $v_3 = \{b, ab, a^2b, \ldots, a^{n-1}b\}$. Berdasarkan Teorema 3.2, diperoleh $\deg(v_1) = 2n - 1$, $\deg(v_2) = n + 1$, dan $\deg(v_3) = n$.
Sehingga, Indeks Zagreb pertama dari $\Gamma_{D_{2n}}$ adalah sebagai berikut.

$$M_1(G) = \sum_{u \in V(G)} (\deg(u))^2$$

Berdasarkan definisi grup dihedral, jumlah unsur pada unsur rotasi dan refleksi pada grup dihedral secara berturut–turut adalah $n - 1$ dan n. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 3.2, diperoleh

$$\begin{aligned}
M_1(G) =& (2n-1)^2 + (n-1)(n+1)^2 + n(n^2) \\
=& (4n^2 - 4n + 1) + (n-1)(n^2 + 2n + 1) + n^3 \\
=& 4n^2 - 4n + 1 + n^3 + 2n^2 + n - n^2 - 2n - 1 + n^3 \\
=& 2n^3 + 5n^2 - 5 \\
=& n(2n^2 + 5n - 5)
\end{aligned}$$

□

Selanjutnya ada indeks Gutman dan diberikan definisi sebagai berikut

Definisi 3.5. [14] Indeks gutman suatu graf G atau dilambangkan dengan (G) didefinisikan sebagai

$$Gut(G) = \sum_{\{u,v\} \in V(G)} \deg(u) \deg(v) d(u, v)$$

dengan $\deg(u)$, $\deg(v)$ adalah derajat dari u dan v, dan $d(u, v)$ adalah jarak simpul u dan v pada graf G.

Karakteristik dari indeks Gutman dari graf koprima grup dihedral diberikan sebagai berikut.

Teorema 3.6. *Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima, $p \neq 2$ dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks gutman dari graf koprima dari grup dihedral adalah*

$$Gut(\Gamma_{D_{2n}}) = 3n^4 - 4n^3 + 8n^2 - 11n + 3$$

Bukti. Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf koprima dari grup dihedral. Ambil $n = p^k$ dengan p bilangan prima, $p \neq 2$ dan $k \in \mathbb{N}$. Diperoleh graf koprima dengan 3 partisi yakni $v_1 = \{e\}, v_2 = \{a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, dan $v_3 = \{b, ab, a^2b, \ldots, a^{n-1}b\}$. Berdasarkan Teorema 3.2, diperoleh $\deg(v_1) = 2n - 1$, $\deg(v_2) = n + 1$, dan $\deg(v_3) = n$. Dan didapatkan juga jumlah pasangan simpul pada V_1 dan V_2 adalah $n - 1$, jumlah pasangan simpul pada V_1 dan V_3 adalah n, jumlah pasangan simpul pada V_2 dan V_3 adalah $n(n-1)$, dan jumlah pasangan simpul dari partisi yang sama adalah $C_2^{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Karena graf berbentuk tripartit lengkap, diperoleh jarak antar simpul subhimpunan partisi yang berbeda adalah satu, dan antar simpul pada partisi yang sama adalah dua.

Sehingga, indeks gutman dari $\mathit{\Gamma}_{D_{2n}}$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
Gut(\mathit{\Gamma}_{D_{2n}}) &= \sum_{u,v\in V(G)} \deg(u)\deg(v)d(u,v)\\
&= \sum_{u\in V_1, v\in V_2} \deg(u)\deg(v)d(u,v) + \sum_{u\in V_1, v\in V_3} \deg(u)\deg(v)d(u,v)\\
&\quad + \sum_{u\in V_2, v\in V_3} \deg(u)\deg(v)d(u,v) + \sum_{u,v\in V_2} \deg(u)\deg(v)d(u,v)\\
&\quad + \sum_{u,v\in V_3} \deg(u)\deg(v)d(u,v)\\
&=((2n-1)(n+1)(n-1)) + ((2n-1)(n)(n)) + ((n+1)(n)(n-1)n)\\
&\quad + ((n-1)(n-1)(C_2^{n-1})(2)) + ((n)(n)(C_2^{n-1})(2))\\
&=((2n-1)(n^2-1)) + (2n^3-n^2) + (n^4-n^2) + (n^4-5n^3+9n^2-7n+2)\\
&\quad + (n^4-3n^3+2n^2))\\
&=3n^4-4n^3+8n^2-11n+3
\end{aligned}$$

□

Terakhir ada indeks Wiener, di mana definisinya diberikan sebagai berikut.

Definisi 3.6. [15] Misalkan G adalah graf terhubung sederhana. Indeks wiener dari G, dilambangkan dengan $W(G)$, didefinisikan sebagai

$$W(G) = \frac{1}{2}\left[\sum_{u,v\in V(G)} d(u,v)\right]$$

di mana $d(u,v)$ adalah jarak antara simpul u dan v, yaitu jumlah sisi jalur terpendek yang menghubungkan u dan v.

Pada beberapa sumber lain, indeks Wiener dedefinisikan dengan rumus $W(G) = \sum_(\{u,v\} \subseteq V(G))d(u,v)$. Perbedaan utama disini adalah notasi $\{u,v\} \subseteq V(G)$ secara explisit menyatakan $\{u,v\} = \{v,u\}$, akibatnya dengan notasi $u,v \in V(G)$ perlu untuk dikalikan setengah. Selanjutnya diberikan karakteristik dari indeks Wiener dari graf koprima grup dihedral sebagai berikut.

Teorema 3.7. *Misalkan $\mathit{\Gamma}_{D_{2n}}$ graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima, $p \neq 2$ dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks Wiener dari graf koprima dari grup dihedral adalah*

$$W(\mathit{\Gamma}_{D_{2n}})\frac{3n^2+5n-5}{2}$$

Bukti. Misalkan $\mathit{\Gamma}_{D_{2n}}$ graf koprima dari grup dihedral. Ambil $n = p^k$ dengan p bilangan prima, $p \neq 2$, dan $k \in \mathbb{N}$. Diperoleh graf koprima dengan 3 partisi yakni $v_1 = \{e\}, v_2 = \{a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, dan $v_3 = \{b, ab, a^2b, \ldots, a^{n-1}b\}$. Sehingga, indeks wiener dari $\mathit{\Gamma}_{D_{2n}}$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
W(G) =& \frac{1}{2}\left[\sum_{u,v\in V(G)} d(u,v)\right]\\
=& \sum_{v_1,v_2\in V(G)} d(v_1,v_2) + \sum_{v_1,v_3\in V(G)} d(v_1,v_3) + \sum_{v_2\in V(G)} d(v_2,v_2)\\
&+ \sum_{v_3\in V(G)} d(v_3,v_3) + \sum_{v_2,v_3\in V(G)} d(v_2,v_3)
\end{aligned}$$

Berdasarkan definisi grup dihedral dan Teorema 3.2, maka diperoleh jumlah pasangan simpul pada $V(v_1, v_2) = n-1$, jumlah pasangan simpul pada $V(v_1, v_3) = n$, dan jumlah pasangan simpul pada $V(v_2, v_3) = n(n-1)$ sehingga,

$$\begin{aligned}
W(\Gamma_{D_{2n}}) =& \frac{1}{2}\left[(2(2n-1)) + \left(2\left(\frac{1}{2}\right)\left({}^{n-1}_{2}C\right)\right) + \left(2\left(\frac{1}{2}\right)\left({}^{n}_{2}C\right)\right) + (2n(n-1))\right] \\
=& \frac{1}{2}\left[(2n^2+4n-4) + \left(\frac{(n-1)!}{(n-1-2)!2!}\right) + \left(\frac{(n)!}{(n-2)!2!}\right)\right] \\
=& \frac{1}{2}\left[(2n^2+4n-4) + \left(\frac{(n-1)!}{2(n-3)!}\right) + \left(\frac{(n)!}{2(n-2)!}\right)\right] \\
=& \frac{1}{2}\left[(2n^2+4n-4) + \left(\frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{2(n-3)!}\right) + \left(\frac{(n)(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}\right)\right] \\
=& \frac{1}{2}\left[(2n^2+4n-4) + \left(\frac{n^2+3n-2}{2}\right) + \left(\frac{n^2-n}{2}\right)\right] \\
=& \frac{1}{2}\left[(2n^2+4n-4) + \left(\frac{2n^2+2n-2}{2}\right)\right] \\
=& \frac{1}{2}\left[\frac{4n^2+8n-8+2n^2+2n-2}{2}\right] \\
=& \frac{1}{2}\left[\frac{6n^2+10n-10}{2}\right] \\
=& \frac{3n^2+5n-5}{2}
\end{aligned}$$

□

4. Kesimpulan

Graf koprima dari grup dihedral memiliki beberapa indeks topologi. Indeks Harmonik, indeks Harary, indeks Zagreb Pertama, indeks Gutman, dan indeks Wiener dari graf koprima dari grup dihedral secara berturut turut adalah $\frac{2n-2}{3n} + \frac{2n}{3n-1} + \frac{2n^2-2n}{2n+1}$, $3n^2+4n+4$, $n(2n^2+5n-5)$, $n^4+4n^3-3n^2-2n+1$, dan $\frac{3n^2+5n-5}{2}$.

Referensi

[1] H. Hua, K. C. Das, and H. Wang, "On atom-bond connectivity index of graphs," 2019. View online.

[2] M. N. J. F. Ali *et al.*, "Survey on topological indices and graphs associated with a commutative ring," 2020. View online.

[3] A. G. Syarifudin, D. P. Malik, I. Wardhana, *et al.*, "Some characterizatsion of coprime graph of dihedral group d2n," 2021. View online.

[4] Nurhabibah, D. P. Malik, H. Syafitri, and I. G. A. W. Wardhana, "Some results of the non-coprime graph of a generalized quaternion group for some n," *AIP Conf Proc*, vol. 2641, p. 020001, 2022. View online.

[5] I. G. A. W. W. N. Nurhabibah and N. W. Switrayni, "Numerical invariants of coprime graph of a generalized quaternion group," *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, vol. 29, no. 01, pp. 36–44, 2023. View online.

[6] M. N. Husni, H. Syafitri, A. M. Siboro, A. G. Syarifudin, Q. Aini, and I. G. A. W. Wardhana, "The harmonic index and the gutman index of coprime graph of integer group modulo with order of prime power," *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 16, no. 3, 2022. View online.

[7] E. Y. Asmarani, S. T. Lestari, D. Purnamasari, A. G. Syarifudin, S. Salwa, , and I. G. A. W. Wardhana, "The first zagreb index, the wiener index, and the gutman index of the power of dihedral group," *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, vol. 7, no. 4, pp. 513–520, 2023. View online.

[8] M. R. Gayatri, Z. Y. A. Q. Aini, S. Salwa, , and I. G. A. W. Wardhana, "The clique number and the chromatics number of the coprime graph for the generalized quarternion group," *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, vol. 7, no. 2, pp. 409–416, 2023. View online.

[9] A. Gazir and I. G. A. W. Wardhana, "Subgrup non trivial dari grup dihedral," *Eigen Mathematics Journal*, vol. 2, no. 2, pp. 73–76, 2019. View online.

[10] X. MA, H. WEI, and L. YANG, "The coprime graph of a group," *International Journal of Group Theory*, vol. 3, no. 3, pp. 13–23, 2014. View online.

[11] A. G. Syarifudin, I. G. A. W. Wardhana, and N. W. Switrayni, "The degree, radius, and diameter of coprime graph of dihedral group," *Proceedings International Conference on Science and Technology (ICST)*, pp. 149–154, 2020. View online.

[12] U. Devandra, "Indeks harary pada graf koprima pada grup bilangan bulat modulo berorde pangkat prima," *FRAKTAL: JURNAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA*, vol. 4, no. 1, pp. 26–30, 2023. View online.

[13] T. Mansour, M. A. Rostami, E. Suresh, and G. B. A. Xavier, "On the bounds of the first reformulated zagreb index," *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, vol. 4, no. 1, pp. 8–15, 2016. View online.

[14] J. P. Mazorodze, S. Mukwembi, and T. Vetrik, "The gutman index and the edge-wiener index of graphs with given vertex-connectivity," *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, vol. 36, no. 4, pp. 867–876, 2016. View online.

[15] V. Aşkin, Şerife Büyükköse, *et al.*, "The wiener index of an undirected power graph," *Advances in Linear Algebra & Matrix Theory*, vol. 11, no. 01, p. 21, 2021. View online.

Format Sitasi IEEE:

M.R. Gayatri, R. Fadhilah, S.T. Lestari, L. F. Pratiwi, Abdurahim, I.G.A.W. Wardhana, "*Indeks Topologi dari Graf Koprima untuk Grup Dihedral dengan Orde Pangkat Prima*", *Jurnal Diferensial*, vol. 5(2), pp. 126-134,2023.