J. DIFERENSIAL/E-ISSN:2775-9644
Vol.6(1),2024, 52–56
doi:https://doi.org/10.35508/jd.v6i1.12526

ARTIKEL PENELITIAN

Dimensi Metrik Campuran pada Graf *Double Fan*

Deddy Rahmadi[1]

[1]*Program Studi Matematika, UIN Sunan Kalijaga, Yogyakarta-Indonesia*
[*]*Penulis korespondensi: deddy.rahmadi@uin-suka.ac.id*

Diterima: 07 September 2023; Direvisi: 08 November 2023; Disetujui: 11 November 2023; Dipublikasi:09 Februari 2024.

Abstrak: Misal $G = (V(G), E(G))$ adalah graf sederhana. Suatu titik $x \in V(G)$ merupakan pembeda dari elemen $u, v \in V(G) \cup E(G)$ jika $d(x, u) \neq d(x, v)$. Dimensi metrik campuran, baru saja diperkenalkan. Dimensi metrik campuran ($mdim(G)$) pada graf G adalah kardinalitas terkecil dari himpunan titik yang merupakan pembeda dari setiap pasang elemen dari $V(G) \cup E(G)$. Pada penelitian ini, akan diidentifikasi dimensi metrik campuran pada graf *double fan*.

Kata Kunci: dimensi metrik campuran, teori graf, basis metrik campuran, graf double fan

Abstract: Let $G = (V(G), E(G))$ be a simple connected graph. A vertex $x \in V(G)$ resolves the elements $u, v \in V(G) \cup E(G)$ if $d(x, u) \neq d(x, v)$. The mixed metric dimension, has been recently introduced. The mixed metric dimension ($mdim(G)$) of a graph G is the cardinality of a smallest set of vertices that resolves each pair of elements from $V(G) \cup E(G)$. In this paper, we will identify the mixed metric dimension on double fan graph.

Keywords: mixed metric dimension, graph theory, mixed metric basis, double fan graph

1. Pendahuluan

Diberikan $G = (V(G), E(G))$ adalah graf terhubung dan sederhana, dengan $V(G)$ merepresentasikan himpunan elemen yang disebut titik dan $E(G)$ merepresentasikan himpunan elemen yang disebut sisi. Dimensi metrik campuran pada suatu graf diperkenalkan oleh [1]. Kajian ini, merupakan campuran antara dimensi metrik dan dimensi metrik sisi.

Pada graf terhubung G, jarak antara dua titik u dan v adalah panjang dari lintasan terpendek antara titik u dan v pada graf G. Suatu titik w merupakan pembeda dari titik $u, v \in V(G)$ jika $d(u, w) \neq d(v, w)$. Koordinat metrik $r(v, S)$ dari titik v terhadap himpunan titik terurut $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ yang didefinisikan $r(v, S) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \ldots, d(v, w_k))$. Himpunan S merupakan himpunan pembeda jika setiap dua titik u dan v dari G yang dibedakan paling sedikit oleh satu titik di S. Basis metrik dari graf G adalah himpunan pembeda dengan kardinalitas terkecil. Dimensi metrik pada graf G adalah kardinalitas dari basis metrik yang dinotasikan $dim(G)$. Slater [2] dan Harary Melter [3] mengenalkan himpunan pembeda pada graf. Beberapa penelitian yang dipublikasikan terkait penerapan dan sifat teoritis dimensi metrik. Penerapan pada bidang robotika, dianalisis pada [4] dan penerapan pada bidang kimia dipaparkan pada [5] dan [6]. Secara umum, terdapat beberapa perkembangan dari dimensi metrik: dimensi metrik kuat [7], dimensi metrik lokal [8], dimensi k-metrik [7], dan lain-lain.

Jarak antara titik w dan sisi uv pada graf G didefinisikan sebagai $d(uv,w) = min\{d(u,w), d(v,w)\}$. Titik w membedakan dua sisi $e, f \in E(G)$ jika $d(w,e) \neq d(w,f))$. Koordinat metrik $r(e,S)$ dari sisi e terhadap himpunan titik terurut $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ yang didefinisikan $r(v,S) = (d(e,w_1), d(e,w_2), \ldots, d(e,w_k))$. Himpunan S merupakan himpunan pembeda jika setiap dua sisi e dan f dari $E(G)$ yang dibedakan paling sedikit oleh satu titik di S. Basis metrik sisi dari graf G adalah himpunan pembeda dengan kardinalitas terkecil. Dimensi metrik pada graf G adalah kardinalitas dari basis metrik yang dinotasikan $dim_E(G)$. Konsep tentang dimensi metrik sisi diperkenalkan oleh Kelenc et al [9].

Misalkan $V(G) \cup E(G)$ adalah gabungan semua himpunan titik dan sisi pada graf G. Titik v merupakan pembeda dari elemen di $V(G) \cup E(G)$ jika $d(a,v) \neq d(v,b)$ untuk $a, b \in V(G) \cup E(G)$. Koordinat metrik $r(a,S)$ dari a terhadap himpunan titik terurut $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ yang didefinisikan $r(v,S) = (d(a,w_1), d(a,w_2), \ldots, d(a,w_k))$. Himpunan S dikatakan sebagai himpunan pembeda campuran jika setiap dua elemen dari G dibedakan oleh paling sedikit satu titik di S. Basis metrik campuran dari graf G adalah himpunan pembeda campuran dengan kardinalitas terkecil. Dimensi metrik campuran dari graf G adalah kardinalitas dari basis metrik campuran yang dinotasikan sebagai $dim_M(G)$.

Konsep dari dimensi metrik campuran sudah diperkenalkan oleh Kelenc et al. [1]. Pada penelitian ini, dimensi metrik campuran telah diterapkan pada beberapa kelas graf, yaitu graf lintasan, graf *cycle*, graf pohon, graf grid, dan graf bipartit lengkap. Nilai eksak dari dimensi metrik campuran dari graf *unicyclic* dan batas atas dari graf yang memuat subgraf *unicyclic* dijelaskan pada [10].

Penelitian mengenai dimensi metrik pada graf *double fan* diberikan pada Teorema 1.1 yang dikaji oleh Silalahi dan Mulyono pada [11] dan dimensi k-metrik diberikan oleh Rahmadi pada [12].

Teorema 1.1. *Misal $f_{2,n}$ adalah graf double fan. Untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$, maka*

$$dim(f_{2,n}) = \begin{cases} \frac{2n+7}{5}, & n = 5i+4, i \geq 0; \\ \lceil \frac{2n+2}{5} \rceil, & n \neq 5i+4, i \geq 0. \end{cases}$$

Selanjutnya pada penelitian ini, dimensi metrik campuran akan dikaji pada kelas graf *double fan*.

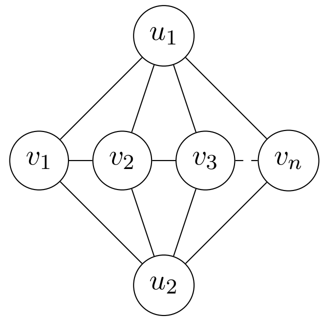
2. Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah menerapkan konsep dimensi metrik campuran pada kelas graf *double fan* dengan urutan

1. Menentukan jarak antar titik pada graf *double fan*.
2. Menentukan jarak antar setiap titik dan sisi pada graf *double fan*
3. Menentukan himpunan pembeda campuran.
4. Memperoleh basis metrik campuran.
5. memperoleh nilai dimensi metrik campuran pada graf *double fan*.

3. Hasil dan Pembahasan

Graf *double fan* yang dinotasikan $f_{2,n}$ adalah graf yang diperoleh dari *join* graf *null* dengan dua titik dan graf *path* dengan n titik. Gambar graf *double fan* $f_{2,n}$ diilustrasikan pada Gambar 3.1. Dari Gambar 3.1 terlihat bahwa graf *double fan* $f_{2,n}$ memiliki $n+2$ titik.



Gambar 3.1: Graf *double fan* $f_{2,n}$

Berikut diberikan tabel jarak setiap dua titik pada graf *double fan* yang disajikan dalam Tabel 3.1.

Tabel 3.1: Jarak setiap dua titik berbeda pada graf $f_{2,n}$

Jarak	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	v_4	$\ldots$	v_n
u_1	0	2	1	1	1	1	$\ldots$	1
u_2	2	0	1	1	1	1	$\ldots$	1
v_1	1	1	0	1	2	2	$\ldots$	2
v_2	1	1	1	0	1	2	$\ldots$	2
v_3	1	1	2	1	0	1	$\ldots$	2
v_4	1	1	2	2	1	0	$\ldots$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	1	1	2	2	2	0	$\ldots$	0

Berikut diberikan proposisi, lema dan teorema mengenai dimensi metrik campuran pada graf *double fan*.

Bagian berikutnya dibahas mengenai sifat teoritis dari dimensi metrik, dimensi metrik sisi, dan dimensi metrik campuran.

Untuk sebarang graf G, berlaku

$$dim_M(G) \geq max\{dim(G), dim_E(G)\}$$

Proposisi 3.1. *Misal v adalah sebarang titik di graf G dan $S = V(G) - \{v\}$. Jika untuk setiap titik $w \in N(v)$, terdapat $x \in S$, berlaku $d(vw, x) \neq d(w, x)$, dengan S adalah himpunan pembeda campuran pada graf G.*

Lebih lanjut, akan ditentukan nilai dari dimensi metrik campuran pada graf tersebut. Untuk titik-titik pada graf *double fan*, dapat dipartisi menjadi $V_1 = \{u_1, u_2\}$ dan $V_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Selanjutnya, berikut diberikan beberapa lema yang akan digunakan untuk membuktikan Teorema 3.1.

Lema 3.1. *Jika S adalah sebarang himpunan pembeda campuran dari graf double fan, maka $|S| \geq n + 1$.*

Bukti. Graf *double fan* $f_{2,n}$ memiliki $n + 2$ titik. Andaikan $|S| < n + 1$, diperoleh $\binom{n+2}{|S|}$ kemungkinan nilai S. Dengan demikian diperoleh semua kemungkinan himpunan S yang dituangkan dalam beberapa pola berikut.

1. $S_1 = \{u_1, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ untuk $k \in \{1, 2, ..., n - 1\}$.
2. $S_2 = \{u_2, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ untuk $k \in \{1, 2, ..., n - 1\}$.
3. $S_3 = \{u_1, u_2, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ untuk $k \in \{1, 2, ..., n - 2\}$.

4. $S_4 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ untuk $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Kemudian, diberikan tabel yang untuk menjelaskan bahwa setiap kemungkinan himpunan S_1, S_2, S_3, dan S_4 bukan merupakan himpunan pembeda campuran.

Tabel 3.2: Kemungkinan himpunan S yang bukan himpunan pembeda campuran pada graf $f_{2,n}$

Kemungkinan Himpunan S	Kesimpulan
$S_1 = \{u_1, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ untuk $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$	$r(v_4v_{n-1}\|S_1) = r(v_4v_n\|S_1)$
$S_2 = \{u_2, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ untuk $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$	$r(u_1v_{n-1}\|S_2) = r(u_1v_n\|S_2)$
$S_3 = \{u_1, u_2, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ untuk $k \in \{1, 2, ..., n-2\}$	$r(u_1v_{n-1}\|S_3) = r(u_1v_n\|S_3)$
$S_4 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ untuk $k \in \{1, \ldots, n\}$	$r(u_1\|S_4) = r(u_2\|S_4)$

Untuk setiap elemen pada graf *double fan*, diperoleh $r(a|S) = r(b|S)$, terjadi kontradiksi, dengan demikian $|S| \geq n+1$.

□

Teorema 3.1. *Misalkan $f_{2,n}$ adalah graf dengan $n \geq 2$, maka $dim_M(f_{2,n}) = n+1$.*

Bukti. Untuk sebarang nilai $n \geq 2$, dipilih $S = \{u_1, u_2, v_1, v_2, \ldots v_n\}$, diperoleh metrik representasi sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
r(u_1|S) &= (0, 2, 1, 1, \ldots, 1, 1);\\
r(u_2|S) &= (2, 0, 1, 1, \ldots, 1, 1);\\
r(v_1|S) &= (1, 1, 0, 2, \ldots, 2, 2);\\
r(v_2|S) &= (1, 1, 1, 1, \ldots, 2, 2);\\
&\vdots \\
r(v_{n-1}|S) &= (1, 1, 2, 2, \ldots, 1, 1);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r(v_n|S) &= (1, 1, 2, 2, \ldots, 2, 0);\\
r(u_1v_i|S) &= (0, 1, \ldots, 1, 0, 1, \ldots, 1); \textit{untuk } i = 1, 2, \ldots, n;\\
r(u_2v_i|S) &= (1, 0, 1, \ldots, 1, 0, 1, \ldots, 1); \textit{untuk } i = 1, 2, \ldots, n;\\
r(v_iv_n) &= (1, 1, 0, 1, \ldots, 1, 0, 1 \ldots, 1); \textit{untuk } i = 1, 2, \ldots, n-2;\\
r(v_iv_{i+1}) &= (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, 1, \ldots, 1); \textit{untuk } i = 1, 2, \ldots, n;\\
r(v_iv_j) &= (1, 1, \ldots, 0, 1, \ldots, 0, 1)
\end{aligned}
$$

Diperoleh bahwa setiap metrik representasi berbeda, dengan demikian S adalah himpunan pembeda campuran, jadi $S \leq n+1$. Berdasarkan Lema 3.1, S adalah basis metrik campuran dan dimensi metrik campuran dari graf *double fan* adalah $n+1$. □

4. Kesimpulan

Pada penelitian ini, telah diteliti dimensi metrik campuran pada graf *double fan*. Pertama diberikan Lema dan Proposisi yang mendukung untuk membuktikan Teorema 3.1. Telah dibuktikan bahwa $dim_M(f_{2,n}) = n+1$. Lebih lanjut, penulis memberi saran untuk melanjutkan penelitian terkait dimensi metrik campuran pada beberapa kelas graf khusus dan dimensi metrik sisi dari graf *double fan* dan dipandang dari sisi komputasi.

Referensi

[1] A. Kelenc, D. Kuziak, A. Taranenko, and I. G. Yero, “Mixed metric dimension of graphs,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 314, pp. 429–438, 2017. View online.
[2] P. J. Slater, “Leaves of trees,” *Congr*, vol. 14, pp. 549–559, 1975. View online.
[3] F. Harary and R. A. Melter, “On the metric dimension of a graph,” *Ars Combin*, vol. 2, pp. 191–195, 1976. View online.
[4] S. Khuller, B. Raghavachari, and A. Rosenfeld, “Landmarks in graphs,” *Discrete Appl. Math*, vol. 70, pp. 217–229, 1996. View online.
[5] M. Johnson, “Structure-activity maps for visualizing the graph variables arising in drug design,” *J Biopharm Stat.*, vol. 3, pp. 203–236, 2007. View online.
[6] G. Chartrand, C. Poisson, and P. Zhang, “Resolvability and the upper dimension of graphs,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 39, pp. 19–28, 2000. View online.
[7] A. Sebö and E. Tannier, “On metric generators of graphs,” *Math. Oper. Res.*, vol. 29, pp. 383–393, 2004. View online.
[8] F. Okamoto, B. Phinezy, and P. Zhang, “The local metric dimension of a graph,” *Math. Bohemica*, vol. 135, pp. 239–255, 2010. View online.
[9] A.Kelenc, N.Tratnik, and I.G.Yero, “Uniquely identifying the edges of a graph: The edge metric dimension,” *Discrete Appl. Math.*, vol. 251, pp. 204–220, 2018. View online.
[10] J.Sedlar and R. Škrekovski, “Mixed metric dimension of a graphs with edge disjoint cycles,” *Discrete Appl. Math.*, vol. 300, pp. 1–8, 2021. View online.
[11] R.Silalahi and Mulyono, “Metric dimensions and partition dimensions of a multiple fan graph,” *Formosa Journal of Science and Technology*, vol. 2, pp. 81–88, 2023. View online.
[12] D.Rahmadi and Y. Susanti, “The k-metric dimension of double fan graph,” *Journal of Innovation and Technology in Mathematics and Mathematics Education*, vol. 2, pp. 31–35, 2022. View online.

textcolorjdFormat Sitasi IEEE:
Rahmadi, *"Dimensi Metrik Campuran pada Graf Double Fan"*, *Jurnal Diferensial*, vol. 6(1), pp. 52-56, 2024.