J. DIFERENSIAL/E-ISSN:2775-9644
Vol.6(1),2024, 57–64
doi:https://doi.org/10.35508/jd.v6i1.12746

ARTIKEL PENELITIAN

Bilangan Kromatik Graceful pada Keluarga Graf Sentripetal

Deninta Dwi Ayu Lestari[1], **Arika Indah Kristiana**[1,*], **Rafiantika Megahnia Prihandini**[1], **Ridho Alfarisi**[1], **Toto Bara Setiawan**[1], **Robiatul Adawiyah**[1]

[1] *Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Jember, Jember-Jawa Timur, Indonesia*
[*] *Penulis korespondensi: arika.fkip@unej.ac.id*

Diterima: 05 Oktober 2023; Direvisi: 04 Desember 2023; Disetujui: 03 Januari 2024; Dipublikasi:09 Februari 2024.

Abstrak: Salah satu topik yang dipelajari dalam graf adalah pewarnaan graf. Definisi dari pewarnaan *graceful*, yaitu $k-$ pewarnaan *graceful* dari graf G adalah pewarnaan titik *proper* $c : V(G) \to \{1, 2, , ..., k\}$, dimana $k \geq 2$ yang menginduksikan pewarnaan sisi *proper* $c' : V(G) \to \{1, 2, ..., k-1\}$, yang didefinisikan oleh $c(uv) = |c(u) - c(v)|$. Pewarnaan titik *proper* c dari graf G adalah pewarnaan *graceful* jika c adalah k-pewarnaan *graceful* untuk $k \in N$. Bilangan kromatik *graceful* merupakan nilai k minimal dimana graf G memiliki k-pewarnaan *graceful*, bilangan kromatik *graceful* dari graf G dilambangkan dengan $X_g(G)$. Artikel ini akan membahas bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf sentripetal yang meliputi graf gurita (O_n), graf sandat (St_n), graf kincir angin belanda (D_3^m) , dan graf gunung api (V_n).

Kata Kunci: Bilangan kromatik, Pewarnaan *graceful*, Keluarga graf sentripetal

Abstract:
One of the topics studied in graphs is graph coloring. The definition of a graceful coloring, namely k-elegant coloring of a graph G is the exact vertex coloring $c : V(G) \to \{1, 2, ..., k\}$ where $k \geq 2$ induces the exact vertex coloring $c' : V(G) \to \{1, 2, ..., k-1\}$ which is defined by $c(uv) = |c(u) - c(v)|$. The exact vertex coloring c of a graph G is a graceful coloring if c is a k-elegant coloring for $k \in N$. The graceful chromatic number is the minimum k value where graph G has k-elegant coloring, the elegant chromatic number of graph G is denoted by $X_g(G)$. This article will discuss graceful chromatic numbers in the centripetal graph family which includes octopus graph (O_n), sandat graph (St_n),dutch windmill graph(D_3^m) , and a volcano graph(V_n).

Keywords: Chromatic Number, Graceful Coloring, Family of Centripetal Graph

1. Pendahuluan

Suatu graf G adalah pasangan himpunan berhingga dari himpunan titik dan himpunan sisi, dinotasikan dengan $G = (V, E)$ dimana V merupakan titik dan E merupakan sisi, sebuah graf mungkin tidak memiliki sisi akan tetapi graf harus memiliki titik minimal satu [1, 2]. Himpunan titik dituliskan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ dan himpunan sisi ditulis $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$. Kardinalitas titik atau juga disebut sebagai order pada graf G dinotasikan dengan $|V(G)|$, sedangkan kardinalitas sisi atau disebut sebagai *size* pada graf G dinotasikan dengan $|E(G)|$ [3, 4]. Misalkan u

dan v merupakan titik-titik dari graf G, maka u dan v dikatakan bertetangga jika terdapat sebuah sisi e yang menghubungkan u dan v, yaitu $e = uv$. Derajat atau degree dengan titik u dinotasikan dengan $d(u)$ merupakan banyaknya sisi yang bersisian pada titik u. Titik dengan derajat 0 disebut titik terisolasi dan titik dengan derajat 1 disebut titik akhir. Derajat titik terbesar pada suatu graf G disebut derajat maksimum yang dituliskan dengan $\Delta(G)$. Derajat minimum dari graf G dituliskan dengan $\delta(G)$. Sejarah graf dimulai sejak adanya permasalahan pada jembatan *Konigsberg*, tepatnya pada tahun 1736. Pada saat itu seorang ahli matematika dan fisika yang berasal dari Swiss bernama Leonhard Euler menulis tentang upaya pemecahan masalah jembatan *Konigsberg* di Eropa. Setelah penemuan teori graf yang dikenalkan oleh Leonhard Euler, Teori graf mulai mengalami perkembangan hingga saat ini dengan berbagai cabang pembahasan didalamnya [5, 6] . Teori graf merupakan ilmu yang banyak dikembangkan dan diaplikasikan dalam kehidupan. Pewarnaan graf merupakan salah satu bahasan dari teori graf [7, 8] . Pewarnaan *graceful* merupakan salah satu topik pewarnaan yang berkembang saat ini. Topik yang digunakan dalam penelitian ini adalah pewarnaan *graceful*. Pewarnaan *graceful* merupakan pewarnaan setiap titik dan sisi menggunakan bilangan asli dimana warna yang digunakan boleh berulang baik pada himpunan titik maupun sisi dengan syarat setiap titik ataupun sisi yang bertetangga pada graf memiliki warna berbeda. Pemberian warna pada setiap sisinya merupakan selisih dari dua titik yang bertetangga. Jumlah bilangan kromatik pada pewarnaan *graceful* dari graf G merupakan jumlah warna yang optimal pada titiknya dan dilambangkan dengan $X_g(G)$ [9] .

Definisi terkait Pewarnaan *proper* dan Pewarnaan *graceful* adalah sebagai berikut :

Definisi 1.1. [10–12] Misalkan G sebuah graf. Sebuah pewarnaan- k pada G adalah pewarnaan semua titik G dengan menggunakan k warna. Sebuah pewarnaan- k disebut sejati (*"proper"*) jika dalam pewarnaan- k tersebut setiap dua titik yang berhubungan langsung harus mendapat warna berbeda. Kelas warna adalah himpunan titik-titik berwarna sama. Minimum nilai k sedemikian hingga ada pewarnaan- k sejati pada G disebut bilangan kromatik G, disimbolkan dengan $\lambda(G)$. Jadi $\lambda(G) = \min\ \{k|$ ada pewarnaan-k sejati pada $G)$

Definisi 1.2. [13, 14] k-pewarnaan *graceful* dari graf G adalah pewarnaan titik *proper* $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, , ..., k\}$, dimana $k \geq 2$ yang menginduksikan pewarnaan sisi *proper* $c' : V(G) \rightarrow \{1, 2, ..., k-1\}$, yang didefinisikan oleh $c(uv) = |c(u) - c(v)|$. Pewarnaan titik *proper* c dari graf G adalah pewarnaan *graceful* jika c adalah k-pewarnaan *graceful* untuk $k \in N$.

Definisi 1.3. [15–17] Bilangan kromatik graceful merupakan nilai k minimal dimana graf G memiliki k-pewarnaan graceful, bilangan kromatik graceful dari graf G dilambangkan dengan $X_g(G)$.

Berikut adalah lemma yang akan dipakai dalam proses pembuktian pada penelitian ini:

Lema 1.1. *Jika G merupakan graf terhubung, maka* $X_g(G) \geq (G)+1$*, dimana* $\Delta(G)$ *adalah derajat maksimum dari graf G.*

2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode pendeteksi pola *(pattern recognition)* dan metode deduktif aksiomatik. Metode pendeteksi pola adalah metode yang digunakan untuk menemukan dan mencari pola dengan pewarnaan *graceful* sehingga didapatkan bilangan kromatik *graceful* $X_g(G)$ pada keluarga graf sentripetal. Metode deduktif aksiomatik adalah metode yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang terdapat dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk menetapkan pengertian dasar pewarnaan *graceful*, Teorema yang diperoleh kemudian diturunkan untuk memperoleh pewarnaan titik dan sisi pada graf sentripetal.

3. Hasil dan Pembahasan

Teorema 3.1. *Bilangan kromatik graceful pada graf gurita* (O_n) *untuk* $n \geq 2$ *adalah* $X_g(O_n) = 2n + 1$

Bukti. Graf gurita (O_n) untuk $n \geq 2$ memiliki himpunan titik $V(O_n) = \{x\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{xz_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1$ *order* $|V(O_n)| = 2n+1$ dan *size* $|E(O_n) = 3n-1$ serta derajat maksimum $\Delta(O_n) = 2$

Untuk membuktikan bahwa bilangan kromatik *graceful* pada graf gurita $X_g(O_n) = 2n+1; n \geq 2$, harus dibuktikan terlebih dahulu batas bawah $X_g(O_n) = 2n+1$ dan batas atas $X_g(O_n) \leq 2n+1$. Pertama, dibuktikan batas bawah dari bilangan kromatik *graceful* pada graf gurita (O_n) untuk$n \geq 2$ adalah $X_g(O_n) \geq 2n+1$. Diketahui $\Lambda(O_n) = 2n$, berdasarkan **Lemma 1.1** didapatkan $X_g(O_n) \geq \Lambda(O_n) + 1 = 2n+1$. Sehingga dapat dikatakan jika batas bawah graf gurita (O_n) dengan $n \geq 2$ adalah $X_g(O_n) \geq 2n+1$. Selanjutnya, dibuktikan batas atas dari bilangan kromatik *graceful* pada graf gurita (O_n) dengan $n \geq 2$adalah $X_g(O_n) \geq 2n+1$. Terdapat 2 kasus pewarnaan proper pada graf gurita (O_n).

Kasus 1. $n \equiv 0 \pmod 2$

Pewarnaan titik *proper* yang di dapat sebagai berikut.

$$f(v) = \begin{cases} 2n+1 & \text{untuk} \quad v = x \\ i+1 & \text{untuk} \quad v \in \{y_i, i \equiv 1 \pmod 2; 1 \leq i \leq n-1\} \\ i-1 & \text{untuk} \quad v \in \{y_i, i \equiv 0 \pmod 2; 2 \leq i \leq n\} \\ i+n & \text{untuk} \quad v \in \{z_i, 1 \leq i \leq n\} \end{cases}$$

Pewarnaan titik *proper* tersebut akan menginduksi pewarnaan sisi*proper*-nya sebagai berikut.

$$h(e) = \begin{cases} 1 & \text{untuk} \quad e \in \{y_iy_{i+1}, i \equiv 1 \pmod 2; 1 \leq i \leq n-1\} \\ 3 & \text{untuk} \quad e \in \{y_iy_{i+1}, i \equiv 0 \pmod 2; 2 \leq i \leq n-2\} \\ n-i+1 & \text{untuk} \quad e \in \{xz_i, 1 \leq i \leq n\} \\ 2n-1 & \text{untuk} \quad e \in \{xy_i, i \equiv 1 \pmod 2; 1 \leq i \leq n-1\} \\ 2n+2-i & \text{untuk} \quad e \in \{xy_i, i \equiv 0 \pmod 2; 2 \leq i \leq n\} \end{cases}$$

Kasus 2. $n \equiv 1 \pmod 2$

Pewarnaan titik *proper* yang di dapat sebagai berikut.

$$f(v) = \begin{cases} 2n+1 & \text{untuk} \quad v = x \\ i+1 & \text{untuk} \quad v \in \{y_i, i \equiv 1 \pmod 2; 1 \leq i \leq n-2\} \\ i-1 & \text{untuk} \quad v \in \{y_i, i \equiv 0 \pmod 2; 2 \leq i \leq n-1\} \\ i & \text{untuk} \quad v \in \{y_i = n\} \\ i+n & \text{untuk} \quad v \in \{z_i, 1 \leq i \leq n\} \end{cases}$$

Pewarnaan titik proper tersebut akan menginduksi pewarnaan sisi proper-nya sebagai berikut.

$$h(e) = \begin{cases} 1 & \text{untuk} \quad e \in \{y_iy_{i+1}, i \equiv 1 \pmod 2; 1 \leq i \leq n-1\} \\ 2 & \text{untuk} \quad e \in \{y_iy_{i+1}, i \equiv n\} \\ 3 & \text{untuk} \quad e \in \{y_iy_{i+1}, i \equiv 0 \pmod 2; 2 \leq i \leq n-3\} \\ n-i+1 & \text{untuk} \quad e \in \{xy_i, 1 \leq i \leq n\} \\ 2n-i & \text{untuk} \quad e \in \{xy_i, i \equiv 1 \pmod 2; 1 \leq i \leq n-2\} \\ 2n+2-i & \text{untuk} \quad e \in \{xy_i, i \equiv 0 \pmod 2; 2 \leq i \leq n-1\} \\ n+1 & \text{untuk} \quad e \in \{xy_i, 1 = n\} \end{cases}$$

Berikut adalah contoh pewarnaan *graceful* pada graf gurita (O_3) dan (O_5). Berdasarkan kasus 1 dan 2, batas bawah dan batas atasnya yaitu $X_g(O_n) \geq 2n+1$ dan $X_g(O_n) \leq 2n+1$ dengan kata lain

Gambar 3.1: Pewarnaan *Graceful* (a) Graf (O_3); (b) Graf (O_5)

$2n+1 \leq X_g(O_n) \leq 2n+1$ sehingga $X_g(O_n) = 2n+1$ untuk $n \geq 2$ terbukti. Berdasarkan definisi sisi dari graf O_n dan Definisi 1.2, maka dua yang bertetangga, terdapat selisih dengan kata lain warna dari dua titik tersebut berbeda. Definisi graf O_n, menunjukkan bahwa setiap titik yaitu titik y_i dan z_i terhubung dengan satu titik pusat x. Sehingga semua sisi tersebut berwarna berbeda serta setiap titik berhubungan langsung ke semua titik-titik yang berwarna berbeda. Selanjutnya, berdasarkan fungsi perwarnaan titik baik pada kasus 1 maupun kasus 2, dapat ditunjukan bahwa semua warna pada titik tersebut berbeda. Sehingga, berdasarkan Definisi 1.2 terbukti bahwa semua fungsi pewarnaan sisi pada graf O_n juga berbeda. $\square$

Teorema 3.2. *Bilangan kromatik graceful pada graf sandat* (St_n) *untuk* $n \geq 3$ *adalah* $X_g(St_n) = 3n+1$.

Bukti. Graf sandat (St_n) memiliki himpunan titik $V(St_n) = \{x\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,1}; \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,2;1 \leq i \leq n}\}$ dan himpunan sisi $E(St_n) = \{xy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{xy_{i,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{xy_{i,2}; i \leq i \leq n\} \cup \{y_i y_{i,1}; 1 \leq i \leq n\}\{y_i y_{i,2}; 1 \leq i \leq n\}$, order $|V(St_n)| = 3n+1$ dan *size* $|E(St_n)| = 5n$ serta derajat maksimum $\Lambda(Stn) = 3n$.

Untuk membuktikan bahwa bilangan kromatik *graceful* pada graf sandat $X_g(St_n) = 3n+1; n \geq 3$, harus dibuktikan terlebih dahulu batas bawah $X_g(St_n) \leq 3n+1$ dan batas atas $X_g(St_n) \leq 3n+1$. Pertama, dibuktikan batas bawah dari bilangan kromatik *graceful* pada graf sandat (St_n) untuk $n \leq 3$ adalah $X_g(St_n) \geq 3n+1$. Diketahui $\Lambda(St_n) = 3n$, berdasarkan **Lemma 1.1** didapatkan $X_g(St_n) \geq \Lambda(St_n)+1 = 3n+1$. Sehingga dapat dikatakan jika batas bawah graf sandat (St_n) dengan $n \geq 3$ adalah $X_g(St_n) \leq 3n+1$.
Selanjutnya, dibuktikan batas atas dari bilangan kromatik graceful pada graf sandat (St_n) dengan $n \geq 3$ adalah $X_g(St_n) \leq 3n+1$.

$$f(v) = \begin{cases} 1 & \text{untuk} \quad v = x \\ i+1 & \text{untuk} \quad v \in \{y_i, 1 \leq i \leq n\} \\ 2i+n & \text{untuk} \quad v \in \{y_{i,1}, 1 \leq i \leq n\} \\ 2i+n+1 & \text{untuk} \quad v \in \{y_{i,2}, 1 \leq i \leq n\} \end{cases}$$

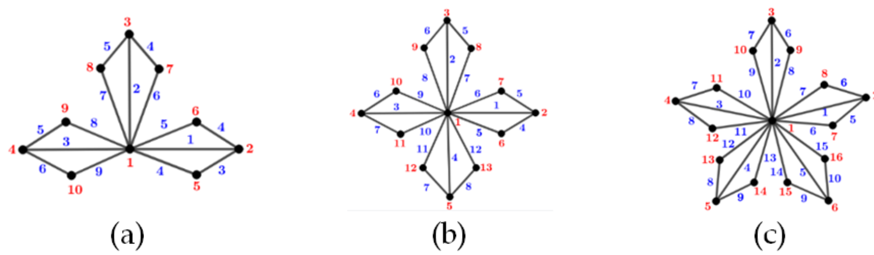
Pewarnaan titik *proper* tersebut akan menginduksi pewarnaan sisi *proper*-nya sebagai berikut.

$$h(e) = \begin{cases} i & \text{untuk} \quad e \in \{xy_i, 1 \leq i \leq n\} \\ n+i & \text{untuk} \quad e \in \{\{y_i y_{i,2}\}, \{y_{i+1} y_{i+1,1}\}, 1 \leq i \leq n\}\} \\ n & \text{untuk} \quad e = y_1 y_{1,1} \\ 2n & \text{untuk} \quad e \in \{y_i y_{i,1}, i = n\} \\ n+2i-1 & \text{untuk} \quad e \in \{xy_{i,1}, 1 \leq i \leq n\} \\ n+2i & \text{untuk} \quad e \in \{xy_{i,2}, 1 \leq i \leq n\} \end{cases}$$

Oleh karena itu, batas bawah dan batas atasnya yaitu $X_g(St_n) \geq 3n+1$ dan $X_g(St_n) \leq 3n+1$ dengan kata lain $3n+1 \leq X_g(St_n) \leq 3n+1$ sehingga $X_g(St_n) = 3n+1$ untuk $n \leq 3$ terbukti.

Berdasarkan definisi sisi dari graf St_n dan Definisi 1.2, maka dua titik yang bertetangga, terdapat selisih dengan kata lain warna dari dua titik tersebut berbeda. Definisi graf St_n, menunjukkan bahwa setiap titik yaitu titik $y_i, y_{i,1}$ dan $y_{i,2}$ terhubung dengan satu titik pusat x. Sehingga semua sisi tersebut berwarna berbeda serta setiap titik berhubungan langsung ke semua titik-titik yang berwarna berbeda. Selanjutnya, berdasarkan fungsi pewarnaan titik, dapat ditunjukkan bahwa semua warna pada titik tersebut berbeda. Sehingga, berdasarkan Definisi 1.2 terbukti bahwa semua fungsi pewarnaan sisi pada graf St_n juga berbeda. □

Berikut adalah contoh pewarnaan graceful pada graf sandat $(St_3), (St_4), (St_5)$.



Gambar 3.2: Pewarnaan *Graceful* (a) Graf (St_3);(b) Graf (St_4); (c) Graf (St_5)

Teorema 3.3. *Bilangan kromatik graceful pada graf kincir angin belanda* (D_3^m) *untuk* $m \geq 2$ *adalah* $X_g(D_3^m) = 2m + 1$.

***Bukti*.** Graf kincir angin belanda (D_3^m) memiliki himpunan titik $V(D_3^m) = \{x\} \cup \{x_1^i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_2^i; 1 \leq i \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(D_3^m) = xx_1^i; 1 \leq i \leq m \cup \{xx_2^i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_1^i x_2^i; 1 \leq i \leq m\}$, *order* $|V(D_3^m)| = 2m + 1$ dan *size* $|E(D_3^m)| = 3m$ serta derajat maksimum $\Lambda(D_3^m) = 2m$.

Untuk membuktikan bahwa bilangan kromatik *graceful* pada graf kincir angin belanda $X_g(D_3^m) = 2m + 1; m \geq 2$, harus dibuktikan terlebih dahulu batas bawah $X_g(D_3^m) \geq 2m + 1$dan batas atas $X_g(D_3^m) \leq 2m+1$. Pertama, dibuktikan batas bawah dari bilangan kromatik *graceful* pada graf kincir angin belanda (D_3^m)untuk $m \geq 2$ adalah $X_g(D_3^m) \geq 2m + 1$. Diketahui $\Lambda(D_3^m) = 2m$, berdasarkan **Lemma 1.1** didapatkan pertidaksamaan $X_g(D_3^m) \geq \Lambda(D_3^m) + 1 = 2m + 1$. Sehingga dapat dikatakan jika batas bawah graf kincir angin belanda (D_3^m) dengan $m \geq 2$ adalah $X_g(D_3^m) \geq 2m + 1$.

Selanjutnya, dibuktikan batas atas dari bilangan kromatik *graceful* pada graf kincir angin belanda (D_3^m)dengan $m \geq 2$ adalah $X_g(D_3^m) \leq 2m+1$. Pewarnaan titik proper yang di dapat sebagai berikut.

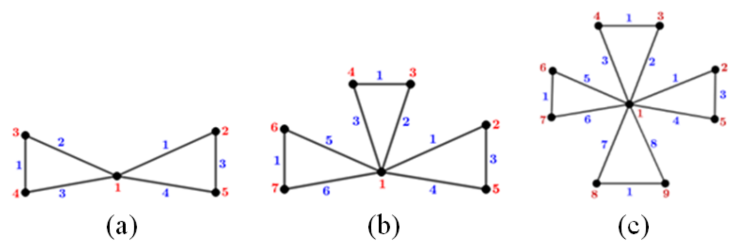
$$f(v) = \begin{cases} 1 & \text{untuk} \quad v = x \\ 2 & \text{untuk} \quad v = x_1^1 \\ 3 & \text{untuk} \quad v = x_1^2 \\ 4 & \text{untuk} \quad v = x_2^2 \\ 5 & \text{untuk} \quad v = x_2^1 \\ 2i & \text{untuk} \quad v \in \{x_1^i, 3 \leq i \leq m\} \\ 2i+1 & \text{untuk} \quad v \in \{x_2^i, 3 \leq i \leq m\} \end{cases}$$

Pewarnaan titik *proper* tersebut akan menginduksi pewarnaan sisi *proper*-nya sebagai berikut.

$$f(v) = \begin{cases} 1 & \text{untuk} \quad e \in \{xx_1^1\}\{x_1^i x_2^i, 2 \leq i \leq m\} \\ 2 & \text{untuk} \quad e = xx_1^2 \\ 3 & \text{untuk} \quad e = xx_2^2 \\ 4 & \text{untuk} \quad e = xx_2^1 \\ 2t-1 & \text{untuk} \quad e \in \{xx_1^i, 3 \leq i \leq m\} \\ 2t & \text{untuk} \quad e \in \{xx_2^i, 3 \leq i \leq m\} \end{cases}$$

Oleh karena itu, batas bawah dan batas atasnya yaitu $X_g(D_3^m) \geq 2m+1$ dan $X_g(D_3^m) \leq 2m+1$ dengan kata lain $2m+1 \leq X_g(D_3^m) \leq 2m+1$ sehingga $X_g(D_3^m) = 2m+1$ untuk $m \geq 2$ terbukti. Berdasarkan definisi sisi dari graf D_3^m dan Definisi 1.2, maka dua titik yang bertetangga, terdapat selisih dengan kata lain warna dari dua titik tersebut berbeda. Definisi graf D_3^m, menunjukkan bahwa setiap titik yaitu titik x_1^i dan x_2^i terhubung dengan satu titik pusat x. Sehingga semua sisi tersebut berwarna berbeda serta setiap titik berhubungan langsung ke semua titik-titik yang berwarna berbeda. Selanjutnya, berdasarkan fungsi pewarnaan titik, dapat ditunjukkan bahwa semua warna pada titik tersebut berbeda. Sehingga, berdasarkan Definisi 1.2 terbukti bahwa semua fungsi pewarnaan sisi pada graf D_3^mjuga berbeda. □

Berikut adalah contoh pewarnaan *graceful* pada graf kincir angin belanda$(D_3^2), (D_3^3), (D_3^4)$.



Gambar 3.3: Pewarnaan *Graceful* (a) Graf (D_3^2); (b) Graf (D_3^3); (b) Graf (D_3^4)

Teorema 3.4. *Bilangan kromatik* $graceful$ *pada graf gunung api*(V_n) *untuk* $n \geq 3$ *adalah* $X_g(V_n) = n+3$.

Bukti. Graf gunung api (V_n) memiliki himpunan titik $V(V_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq 3\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(V_n) = \{x_i x_(i+1); 1 \leq i \leq 2\} \cup \{x_3 x_1\} \cup \{x_1 y_i; 1 \leq i \leq n\}$, *order* $|V(V_n)| = n+3$ dan *size* $|E(V_n)| = n+3$ serta derajat maksimum $\Lambda(V_n) = n+2$.

Untuk membuktikan bahwa bilangan kromatik *graceful* pada graf gunung api $X_g(V_n) = n+3; n \geq 3$, harus dibuktikan terlebih dahulu batas bawah $X_g(V_n) \geq n+3$ dan batas atas $X_g(V_n) \leq n+3$. Pertama, dibuktikan batas bawah dari bilangan kromatik *graceful* pada graf gunung api (V_n) untuk $n \geq 3$ adalah$X_g(V_n) \geq n+3$. Diketahui $\Lambda(V_n) = n+2$, berdasarkan **Lemma 1.1** didapatkan pertidaksamaan $X_g(V_n) \geq \Lambda(V_n)+1 = n+3$. Sehingga dapat dikatakan jika batas bawah graf gunung api (V_n) dengan $n \geq 3$adalah $X_g(V_n)|geqn+3$.

Selanjutnya, dibuktikan batas atas dari bilangan kromatik graceful pada graf gunung api (V_n) dengan $n \geq 3$ adalah $X_g(V_n) \leq n+3$. Pewarnaan titik proper yang di dapat sebagai berikut.

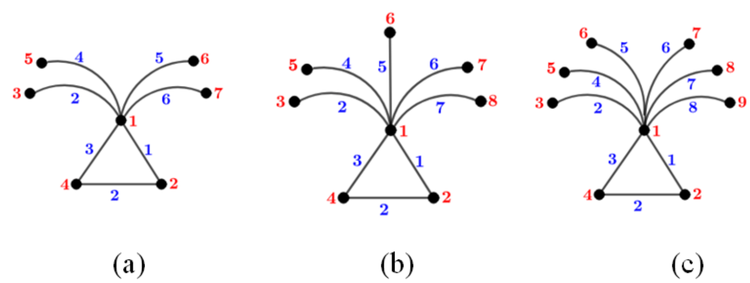
$$f(v) = \begin{cases} 1 & \text{untuk} \quad v = x-1 \\ 2 & \text{untuk} \quad v = x_2 \\ 3 & \text{untuk} \quad v = y_1 \\ 4 & \text{untuk} \quad v = x_3 \\ i+3 & \text{untuk} \quad v \in \{y^i, 2 \leq i \leq n\} \end{cases}$$

Pewarnaan titik proper tersebut akan menginduksi pewarnaan sisi proper-nya sebagai berikut.

$$h(e) = \begin{cases} 1 & \text{untuk} \quad e = x_1x_2 \\ 2 & \text{untuk} \quad e = x_2x_3, x_1y_1 \\ 3 & \text{untuk} \quad e = x_1x_3 \\ i+2 & \text{untuk} \quad e \in \{x_1, y_i, 2 \leq i \leq n\} \end{cases}$$

Oleh karena itu, batas bawah dan batas atasnya yaitu $X_g(V_n) \geq n+3$ dan $X_g(V_n) \leq n+3$ dengan kata lain $n+3 \leq X_g(V_n) \leq n+3$ sehingga $X_g(V_n) = n+3$ untuk $n \geq 3$ terbukti. Berdasarkan definisi sisi dari graf $V_n$dan Definisi 1.2, maka dua titik yang bertetangga, terdapat selisih dengan kata lain warna dari dua titik tersebut berbeda. Definisi graf V_n, menunjukkan bahwa setiap titik yaitu titik x_2, x_3 dan y_i terhubung dengan satu titik pusat x_1. Sehingga semua sisi tersebut berwarna berbeda serta setiap titik berhubungan langsung ke semua titik-titik yang berwarna berbeda. Selanjutnya, berdasarkan fungsi pewarnaan titik, dapat ditunjukkan bahwa semua warna pada titik tersebut berbeda. Sehingga, berdasarkan Definisi 1.2 terbukti bahwa semua fungsi pewarnaan sisi pada graf V_n juga berbeda. □

Berikut adalah contoh pewarnaan *graceful* pada graf gunung api $(V_4), (V_5), (V_6)$.



Gambar 3.4: Pewarnaan *Graceful* (a) Graf (V_4); (b) Graf (V_5); (b) Graf (V_6)

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh teorema baru tentang bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf sentripetal yang terdiri dari graf gurita(O_n), graf sandat (St_n), graf kincir angin belanda (D_3^m), dan graf gunung api (V_n). Bilangan kromatik graceful pada keluarga graf sentripetal yang diperoleh adalah $\Lambda(G) + 1$.

5. Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai bilangan kromatik *graceful*, perlu kita ketahui jika masih ada beberapa kelas graf yang belum diteliti pada topik pewarnaan *graceful* misalnya graf buku, graf tunas kelapa, graf sarang laba-laba dan lain sebagainya. Selain itu untuk operasi graf, masih ada beberapa operasi yang belum diteliti seperti operasi *cartesian*, operasi *comb*, operasi *corona* dan lain sebagainya.

Referensi

[1] R. Alfarisi, R. Prihandini, R. Adawiyah, E. Albirri, I. Agustin, *et al.*, "Graceful chromatic number of unicyclic graphs," in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1306, p. 012039, IOP Publishing, 2019. View Online.

[2] M. Amaliyanah, *Spektrum Laplace pada Graf Kincir Angin Berarah (Q3, k)*. PhD thesis, Universitas Jenderal Soedirman, 2022. View Online.

[3] G. Chartrand, L. Lesniak, and P. Zhang, *Graphs & digraphs*, vol. 39. CRC press, 2010. View Online.
[4] M. M. Shalaan and A. A. Omran, "Co-even domination number in some graphs," in *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 928, p. 042015, IOP Publishing, 2020. View Online.
[5] K. Q. Fredlina, A. Salman, I. G. P. K. Julihara, K. T. Werthi, N. L. P. N. S. Putri, *et al.*, "Rainbow coloring of three new graph classes," in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1783, p. 012033, IOP Publishing, 2021. View Online.
[6] A. E. Samuel and S. Kalaivani, "Prime labeling to drums graphs," *Annals of Pure and Applied Mathematics*, vol. 16, no. 2, pp. 307–312, 2018. View Online.
[7] E. Juliangkary and S. Yuliyanti, "Pengembangan modul teori graph dengan pembelajaran berbasis masalah," *Media Pendidikan Matematika*, vol. 4, no. 2, pp. 50–53, 2018. View Online.
[8] P. Zhang *et al.*, *A Kaleidoscopic View of Graph Colorings*. Springer, 2016. View Online.
[9] H. Jusuf, "Pewarnaan graph pada simpul untuk mendeteksi konflik penjadwalan kuliah," in *Seminar Nasional Aplikasi Teknologi Informasi (SNATI)*, 2009. View Online.
[10] M. R. Kanna, R. P. Kumar, R. Jagadeesh, *et al.*, "Computation of topological indices of dutch windmill graph," *Open Journal of Discrete Mathematics*, vol. 6, no. 02, p. 74, 2016. View Online.
[11] R. Mincu, C. Obreja, and A. Popa, "The graceful chromatic number for some particular classes of graphs," in *2019 21st International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC)*, pp. 109–115, IEEE, 2019. View Online.
[12] I. I. Retnoningsih, D. Dafik, and S. Hussen, "Pewarnaan titik pada keluarga graf sentripetal," *CGANT Journal of Mathematics and Applications*, vol. 3, no. 1, 2022. View Online.
[13] S. Khoirunnisa, A. Kristiana, R. Alfarisi, E. Albirri, *et al.*, "On graceful chromatic number of comb product of ladder graph," in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1836, p. 012027, IOP Publishing, 2021. View Online.
[14] A. I. Kristiana, M. I. Utoyo, D. Dafik, I. H. Agustin, R. Alfarisi, and E. Waluyo, "Vertex coloring edge-weighting of coronation by path graphs," IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1211 (2019) 012004, 2019. View Online.
[15] A. I. Kristiana, N. Nikmah, Dafik, R. Alfarisi, M. A. Hasan, and Slamin, "On the local irregularity vertex coloring of volcano, broom, parachute, double broom and complete multipartite graphs," *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, vol. 14, no. 06, p. 2250022, 2022. View Online.
[16] A. P. Rahadi, "Penjadwalan mata kuliah menggunakan pewarnaan graf dengan algoritma largest first," *Jurnal Padegogik*, vol. 2, no. 1, pp. 1–13, 2019. View Online.
[17] N. A. Sania, *Bilangan Kromatik Graceful pada Keluarga Graf Unicyclic*. PhD thesis, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, 2020. View Online.

Format Sitasi IEEE:
D. D. A. Lestari, A. I. Kristiana, R. M. Prihandini, R. Alfarisi, T. B. Setiawan, dan R. Adawiyah, " *Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal pada Hasil Operasi Subdivisi Graf Helm*", *Jurnal Diferensial*, vol. 6(1), pp. 57–64, 2024.