

ARTIKEL PENELITIAN

Dimensi k -Metrik Pada Graf Parasut Diperumum

Deddy Rahmadi^{1,*}, Yeni Susanti²

¹Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga, Yogyakarta, Indonesia

²Program Studi Matematika, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, Indonesia

*Penulis korespondensi: deddy.rahmadi@uin-suka.ac.id

Diterima: 28 Juni 2024; Direvisi: 30 Agustus 2024; Disetujui: 25 September 2024; Dipublikasi: 1 November 2024.

Abstract:

Diberikan graf terhubung dan sederhana $G = (V(G), E(G))$ dan bilangan bulat positif k . Himpunan $S \subseteq V(G)$ disebut sebagai pembangkit k -metrik jika untuk setiap pasang titik berbeda $u, v \in V(G)$, terdapat paling sedikit k titik $w_1, w_2, \dots, w_k \in S$ sedemikian sehingga $d(u, w_i) \neq d(v, w_i)$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, dengan $d(u, v)$ adalah panjang *path* terpendek dari u ke v . Pembangkit k -metrik dengan kardinalitas terkecil disebut basis k -metrik, dan kardinalitas dari basis k -metrik disebut dimensi k -metrik dari graf G yang dinotasikan $dim_k(G)$. Pada penelitian ini akan dibahas mengenai dimensi k -metrik graf parasut diperumum.

Abstract:

Given a simple and connected graph $G = (V(G), E(G))$ and positive integer k . Set $S \subseteq V(G)$ is k -metric generator if for every pairs of distinct vertices $u, v \in V(G)$, there exists at least k vertices $w_1, w_2, \dots, w_k \in S$ such that $d(u, w_i) \neq d(v, w_i)$ for every $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, with $d(u, v)$ is length of shortest path form u ke v . The k -metric generator with minimum cardinality is called k -metric bases, and the cardinalty is k -metric dimension of G denoted by $dim_k(G)$. This research will discuss the k -metric dimension of generalized parachute graphs.

Keywords: dimensi k -metrik, basis k -metrik, pembangkit k -metrik, graf parasut diperumum

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan cabang dari matematika yang mempelajari struktur jaringan melalui konsep graf, yang terdiri dari himpunan titik yang dihubungkan oleh himpunan sisi [1]. Diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada abad ke-18 untuk memecahkan masalah Jembatan Königsberg, teori graf kini telah berkembang pesat dan memiliki aplikasi luas dalam berbagai disiplin ilmu, termasuk ilmu komputer, biologi, sosiologi, dan rekayasa jaringan. Graf dapat digunakan untuk memodelkan berbagai fenomena kompleks, seperti jaringan sosial, interaksi biologis, dan infrastruktur transportasi, dengan menyediakan alat analisis untuk memahami hubungan dan dinamika di antara komponen-komponen sistem tersebut. Penelitian dalam teori graf melibatkan pengembangan algoritma untuk berbagai masalah, seperti pencarian jalur terpendek, pewarnaan graf, dan deteksi subgraf isomorfik, yang sangat penting untuk optimisasi dan analisis data dalam konteks dunia nyata.

Penelitian dalam teori graf terus berkembang seiring berjalannya waktu. Salah satu topik yang sedang berkembang adalah dimensi metrik yang pertama kali muncul pada tahun 1975 [2]. Konsep dimensi metrik telah diterapkan oleh beberapa peneliti seperti [3], [2] dan [4]. [3] dan [4] mengaitkan permasalahan dimensi metrik dengan masalah jaringan. Khuller dkk. [2] kemudian menjelaskan aplikasi permasalahan dimensi metrik graf pada bidang sains, komputasi dan robotika. Beberapa tahun sebelumnya, [5] memperkenalkan suatu metode untuk menentukan penempatan sensor kebakaran yang berdasarkan jarak antar ruangan dalam suatu gedung.

Berdasarkan motivasi tersebut, dikembangkan konsep dimensi metrik yang diperkenalkan dari himpunan pembeda dengan istilah *locating set* yang diperkenalkan oleh Slater ([4]). Dalam artikel tersebut, misal $G = (V(G), E(G))$ adalah graf terhubung, himpunan pembeda $W \subset V(G)$ didefinisikan sebagai himpunan dari titik-titik pada graf G sedemikian sehingga setiap dua titik di G dibedakan oleh suatu titik di W . Dimensi metrik adalah kardinalitas terkecil dari himpunan pembeda. Untuk lebih memperjelas tentang konsep dimensi metrik, misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ adalah subhimpunan dari $V(G)$. Untuk setiap $v \in V(G)$, representasi titik v terhadap W didefinisikan sebagai l -pasang terurut

$$r(v | W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_l)),$$

dengan $d(v, w_i)$ adalah jarak titik v ke titik w_i , untuk setiap $i = 1, \dots, l$. Himpunan W disebut sebagai himpunan pembeda dari G jika untuk setiap dua titik berbeda $x, y \in V(G)$ berlaku $r(x | W) \neq r(y | W)$. Himpunan pembeda dengan kardinalitas terkecil disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari G . Dimensi metrik dari G , dinotasikan $dim(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya elemen dari suatu basis di G .

Seiring dengan perkembangan penelitian pada teori graf, terdapat beberapa pengembangan dari dimensi metrik, seperti dimensi metrik kuat, dimensi metrik lokal, dimensi metrik campuran yang telah diteliti oleh [6–9] dan untuk menutupi kelemahan pada dimensi metrik, telah muncul definisi baru tentang dimensi k -metrik yang dipaparkan oleh [10]. Misal G adalah graf terhubung dan sederhana, himpunan $S \subseteq V(G)$ disebut sebagai pembangkit k -metrik pada G jika dan hanya jika setiap dua pasang titik berbeda di G dibedakan oleh paling sedikit k elemen di S , dengan kata lain untuk setiap dua pasang titik berbeda $u, v \in V(G)$, terdapat paling sedikit k titik $w_1, w_2, \dots, w_k \in S$ sedemikian hingga

$$d(u, w_i) \neq d(v, w_i), \text{ untuk setiap } i \in \{1, \dots, k\}.$$

Pembangkit k -metrik dengan kardinalitas terkecil disebut basis k -metrik dan kardinalitas dari basis k -metrik disebut dimensi k -metrik dari graf G yang dinotasikan $dim_k(G)$.

Estrada-Moreno dkk. [10] telah menemukan dimensi k -metrik pada graf lintasan (*path*), graf lingkaran (*cycle*), graf pohon (*tree*), dan graf hasil operasi *join* dengan titik-titik pada masing-masing graf merupakan *twin vertices*. Selanjutnya, [11] telah menentukan dimensi k -metrik pada hasil operasi korona dua graf dan [12] telah menentukan dimensi k -metrik dari graf *double fan*. Lebih lanjut, penulis tertarik untuk meneliti salah satu variasi dari graf *double fan* yaitu graf parasut diperumum.

2. Dimensi k -Metrik pada Graf

Berikut diberikan terminologi tentang dimensi k -metrik pada graf. Selanjutnya, dijelaskan juga mengenai cara lain untuk mencari pembangkit k -metrik pada graf.

Definisi 2.1. ([10]) Diberikan G adalah graf terhubung. Himpunan $S \subseteq V(G)$ disebut sebagai pembangkit k -metrik pada G jika setiap dua pasang titik berbeda di G dibedakan oleh paling sedikit k elemen di S , dengan kata lain untuk setiap pasang titik berbeda $u, v \in V(G)$, terdapat paling sedikit k titik $w_1, w_2, \dots, w_k \in S$ sedemikian hingga

$$d(u, w_i) \neq d(v, w_i), \text{ untuk setiap } i \in \{1, \dots, k\}.$$

Suatu pembangkit k -metrik dengan kardinalitas terkecil disebut **basis k -metrik** dan kardinalitas dari basis k -metrik disebut **dimensi k -metrik** dari graf G yang dinotasikan $dim_k(G)$.

Sebelum dijelaskan mengenai cara lain mencari pembangkit k -metrik pada graf, berikut dijelaskan mengenai ketaksamaan dua tupel.

Definisi 2.2. ([13]) Diberikan sebarang tupel $a = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ dan $b = (b_1, b_2, \dots, b_d)$, kedua tupel tersebut dikatakan berbeda total jika $a_i \neq b_i$ untuk setiap $i \in \{1, \dots, d\}$ dan dinotasikan $a \neq b$.

Definisi 2.3. ([13]) Diberikan $S \subseteq V(G)$ adalah pembangkit k -metrik jika untuk setiap pasang titik berbeda $u, v \in V(G)$ terdapat $W_{uv} = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subseteq S$ sedemikian hingga $|W_{uv}| = k$ dan $r(u|W_{uv}) \neq r(v|W_{uv})$, dengan $r(v | W_{uv}) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$ adalah representasi titik v terhadap himpunan W_{uv} .

Lema 2.1. Diberikan graf G berorde $n \geq 3$. Dimensi 2-metrik dari graf G adalah $dim_2(G) = 2$ jika dan hanya jika $G \cong P_n$

Bukti. [4] telah menunjukkan bahwa $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G \cong P_n$.
 (\Rightarrow) Jika $dim_2(G) = 2$ dan $dim(G) = 1$, berdasarkan Akibat ?? diperoleh

$$2 = dim_2(G) \geq dim(G) + 1 \geq 2.$$

Jadi G haruslah isomorfis dengan graf *path* P_n .

(\Leftarrow) Berdasarkan Akibat ?? diperoleh bahwa $dim_2(P_n) \geq dim(P_n) + 1 = 2$. Oleh karena titik-titik ujung di graf *path* P_n membedakan setiap pasang titik berbeda di P_n , diperoleh $dim_2(P_n) = 2$. \square

Contoh 2.1. Diberikan graf G_1 yang diilustrasikan seperti pada Gambar 2.1.

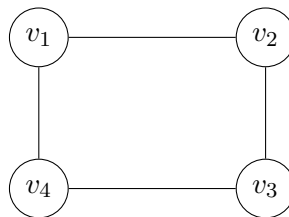


Figure 2.1: Graf G_1

Berikut diberikan tabel jarak antara dua titik di graf G_1 .

[htb]

Table 2.1: Jarak setiap dua titik berbeda pada graf G_1

Jarak	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	2	1
v_2	1	0	1	2
v_3	2	1	0	1
v_4	1	2	1	0

Dari graf G_1 dipilih $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, kemudian dipilih $W_1 = \{v_1, v_3\}$ dan $W_2 = \{v_2, v_4\}$. Lebih lanjut berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh $r(v_1|W_1) = (0, 2)$ dan $r(v_3|W_1) = (2, 0)$, sehingga

$$r(v_1|W_1) \neq r(v_3|W_1).$$

Diperoleh bahwa himpunan W_1 hanya membedakan pasangan titik v_1, v_3 .

Selanjutnya, dari himpunan $W_2 = \{v_2, v_4\}$, diperoleh $r(v_2|W_2) = (0, 2)$ dan $r(v_4|W_2) = (2, 0)$, sehingga

$$r(v_2|W_2) \neq r(v_4|W_2).$$

Diperoleh bahwa himpunan W_2 hanya membedakan pasangan titik v_2, v_4 .

Dengan demikian diperoleh bahwa setiap pasang titik di $V(G_1)$ dibedakan oleh 2 elemen di S , sehingga S adalah pembangkit 2-metrik. Andaikan terdapat $S_1 \subset S$, misal dipilih $S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$. Terdapat pasangan titik v_2, v_4 yang tidak dibedakan oleh sebarang dua elemen di S_1 , sehingga S_1 bukan pembangkit 2-metrik. Oleh karena graf $G_1 \not\cong P_n$, berdasarkan Lema 2.1 maka $\dim_2(G_1) \neq 2$. Dengan demikian S adalah pembangkit 2-metrik dengan kardinalitas terkecil. Jadi S adalah basis 2-metrik dari G_1 dan $\dim_2(G_1) = 4$.

Definisi 2.4. Diberikan graf G . Untuk setiap titik berbeda $u, v \in V(G)$, himpunan distinctive vertices dari u dan v yang dinotasikan $\mathcal{D}_G(u, v)$, didefinisikan sebagai berikut

$$\mathcal{D}_G(u, v) = \{w \in V(G) : d(u, w) \neq d(v, w)\}$$

dan himpunan distinctive vertices yang non-trivial dari u dan v yang dinotasikan $\mathcal{D}_G^*(u, v)$, didefinisikan sebagai berikut

$$\mathcal{D}_G^*(u, v) = \mathcal{D}_G(u, v) - \{u, v\}.$$

Definisi 2.5. Diberikan graf G , yang dimaksud dengan $\mathcal{D}_k(G)$ adalah himpunan yang dibentuk dari gabungan himpunan-himpunan distinctive vertices $\mathcal{D}_G(x, y)$ untuk setiap $x, y \in V(G), x \neq y$ dan $|\mathcal{D}_G(x, y)| = k$ yaitu

$$\mathcal{D}_k(G) = \bigcup_{|\mathcal{D}_G(x, y)|=k} \mathcal{D}_G(x, y).$$

Teorema 2.1. Graf G adalah graf berdimensi k -metrik jika dan hanya jika

$$k = \min_{u, v \in V(G), u \neq v} |\mathcal{D}_G(u, v)|.$$

Lema 2.2. Jika G adalah graf berdimensi k -metrik, maka $\dim_k(G) \geq |\mathcal{D}_k(G)|$.

3. Dimensi k -Metrik pada Graf Parasut Diperumum

Graf parasut diperumum adalah graf yang diperoleh dari graf *double fan* dengan menambahkan *path* sepanjang m pada titik berderajat n . Graf parasut diperumum dinotasikan dengan P_n^m yang mana n merupakan panjang *path* P_n dan m merupakan panjang *path* yang dimulai dari titik berderajat n . Graf parasut diperumum diilustrasikan seperti pada Gambar 3.2.

Sebelum dibahas mengenai dimensi k -metrik pada graf *parasut diperumum*, berikut diberikan tabel jarak setiap dua titik berbeda di P_n^m yang disajikan pada Tabel 3.2.

Berikut diberikan proposisi, lema dan teorema mengenai dimensi k -metrik pada graf parasut diperumum.

Proposition 3.1. Diberikan P_n^m adalah graf parasut diperumum dengan $m \geq 1$ dan $n \geq 4$, maka P_n^m adalah graf berdimensi 3-metrik.

Bukti. Diketahui P_n^m adalah graf parasut diperumum dengan $m \geq 1$ dan $n \geq 4$. Selanjutnya, dapat dilihat dari Tabel 3.2 diperoleh bahwa

$$3 = \min_{u, v \in V(P_n^m), u \neq v} |\mathcal{D}_{P_n^m}(u, v)|.$$

Berdasarkan Teorema 2.1, diperoleh bahwa P_n^m adalah graf berdimensi 3-metrik. □

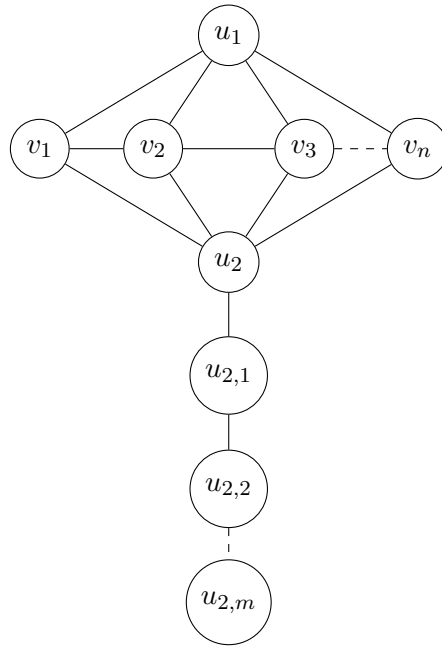


Figure 3.2: Graf P_n^m .

Table 3.2: Jarak setiap dua titik berbeda pada graf P_n^m

Jarak	u_1	u_2	$u_{2,1}$	$u_{2,2}$...	$u_{2,m}$	v_1	v_2	v_3	v_4	...	v_n
u_1	0	2	3	4	...	$m + 2$	1	1	1	1	...	1
u_2	2	0	1	2	...	m	1	1	1	1	...	1
$u_{2,1}$	3	1	0	1	...	$m - 1$	2	2	2	2	...	2
$u_{2,2}$	4	2	1	0	...	$m - 2$	3	3	3	3	...	3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$u_{2,m}$	$m + 2$	m	$m - 1$	$m - 2$...	0	$m + 1$	$m + 1$	$m + 1$	$m + 1$...	$m + 1$
v_1	1	1	2	3	...	$m - 1$	0	1	2	2	...	2
v_2	1	1	2	3	...	$m - 1$	1	0	1	2	...	2
v_3	1	1	2	3	...	$m - 1$	2	1	0	1	...	2
v_4	1	1	2	3	...	$m - 1$	2	2	1	0	...	2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
v_n	1	1	2	3	...	$m - 1$	2	2	2	0	...	0

Berdasarkan Lema 2.2, berikut diberikan batas bawah untuk kardinalitas pembangkit 2-metrik dari graf parasut diperumum.

Lema 3.1. Diberikan P_n^m adalah graf parasut diperumum dengan $m \geq 1$ dan $n \geq 4$. Jika S adalah pembangkit 2-metrik dari P_n^m , maka $|S| \geq \lceil \frac{n+5}{2} \rceil$.

Bukti. Diketahui S adalah pembangkit 2-metrik, artinya untuk setiap $u, v \in V(P_n^m)$ terdapat $W \subset S$ sedemikian sehingga $r(u|W) \neq r(v|W)$ dengan $|W| = 2$. Andaikan S adalah pembangkit 2-metrik dengan $|S| < \lceil \frac{n+5}{2} \rceil$, terdapat kemungkinan himpunan S sebagai berikut,

1. $S \subseteq \{u_1, v_{k_i} | 1 \leq i \leq \lceil \frac{n+5}{2} \rceil - 2\}$ dengan $k_i \in \{1, \dots, n\}$.
2. $S \subseteq \{u_{2,m_1}, u_{2,m_2}, \dots, u_{2,m_j}, v_{k_i} | 1 \leq i \leq \lceil \frac{n+5}{2} \rceil - 1 - j, 1 \leq j \leq m\}$ dengan $k_i \in \{1, \dots, n\}$ dan $m_1, m_2, \dots, m_j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

3. $S \subseteq \{u_1, u_{2,m_1}, u_{2,m_2}, \dots, u_{2,m_j}, v_{k_i} | 1 \leq i \leq \lceil \frac{n+5}{2} \rceil - 2 - j, 1 \leq j \leq m\}$ dengan $k_i \in \{1, \dots, n\}$ dan $m_1, m_2, \dots, m_j \in \{1, 2, \dots, m\}$.
4. $S \subseteq \{v_{k_i} | 1 \leq i \leq \lceil \frac{n+5}{2} \rceil - 1\}$ dengan $k_i \in \{1, \dots, n\}$.
5. $S \subseteq \{u_1, u_{2,k_j} | 1 \leq j \leq \lceil \frac{n+5}{2} \rceil - 1\}$ dengan $k_j \in \{1, 2, \dots, m\}$.
6. $S \subseteq \{u_1, u_{2,k_j} | 1 \leq j \leq m\}$ dengan $k_j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Diperhatikan bahwa untuk setiap $u, v \in V(P_n^m)$, terdapat himpunan $W \subset S$ yang harus memenuhi $r(u|W) \neq r(v|W)$ agar S menjadi pembangkit 2-metrik. Berdasarkan Tabel 3.2 diperoleh bahwa terdapat $u, v \in V(P_n^m)$ sedemikian sehingga $r(u|W) = r(v|W)$ untuk setiap $W \subset S$ dengan $|W| = 2$. Kontradiksi dengan pernyataan bahwa S adalah pembangkit 2-metrik. Pengandaian salah dan harus diingkar, dengan demikian S bukan pembangkit 2-metrik. Jadi, diperoleh bahwa $|S| \geq \lceil \frac{n+5}{2} \rceil$. \square

Berdasarkan Lema 2.2, berikut diberikan batas bawah untuk kardinalitas pembangkit 3-metrik dari graf parasut diperumum.

Lema 3.2. *Diberikan P_n^m adalah graf parasut diperumum dengan $m \geq 1$ dan $n \geq 4$. Jika S adalah pembangkit 3-metrik dari P_n^m , maka $|S| \geq n + 4$.*

Bukti. Diketahui S adalah pembangkit 3-metrik, artinya untuk setiap $u, v \in V(P_n^m)$ terdapat $W \subset S$ sedemikian sehingga $r(u|W) \neq r(v|W)$ dengan $|W| = 3$. Andaikan S adalah pembangkit 3-metrik dengan $|S| < n + 4$, terdapat kemungkinan himpunan S sebagai berikut,

1. $S \subseteq \{u_1, v_{k_i} | 1 \leq i \leq n + 2\}$ dengan $k_i \in \{1, \dots, n\}$.
2. $S \subseteq \{u_{2,m_1}, u_{2,m_2}, \dots, u_{2,m_j}, v_{k_i} | 1 \leq i \leq n + 3 - j, 1 \leq j \leq m\}$ dengan $k_i \in \{1, \dots, n\}$ dan $m_1, m_2, \dots, m_j \in \{1, 2, \dots, m\}$.
3. $S \subseteq \{u_1, u_{2,m_1}, u_{2,m_2}, \dots, u_{2,m_j}, v_{k_i} | 1 \leq i \leq n + 2 - j, 1 \leq j \leq m\}$ dengan $k_i \in \{1, \dots, n\}$ dan $m_1, m_2, \dots, m_j \in \{1, 2, \dots, m\}$.
4. $S \subseteq \{v_{k_i} | 1 \leq i \leq n + 3\}$ dengan $k_i \in \{1, \dots, n\}$.
5. $S \subseteq \{u_1, u_{2,k_j} | 1 \leq j \leq n + 3\}$ dengan $k_j \in \{1, 2, \dots, m\}$.
6. $S \subseteq \{u_1, u_{2,k_j} | 1 \leq j \leq m\}$ dengan $k_j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Diperhatikan bahwa untuk setiap $u, v \in V(P_n^m)$, terdapat himpunan $W \subset S$ yang harus memenuhi $r(u|W) \neq r(v|W)$ agar S menjadi pembangkit 3-metrik. Berdasarkan Tabel 3.2 diperoleh bahwa terdapat $u, v \in V(P_n^m)$ sedemikian sehingga $r(u|W) = r(v|W)$ untuk setiap $W \subset S$ dengan $|W| = 3$. Kontradiksi dengan pernyataan bahwa S adalah pembangkit 3-metrik. Pengandaian salah dan harus diingkar, dengan demikian S bukan pembangkit 3-metrik. Jadi, diperoleh bahwa $|S| \geq n + 4$. \square

Teorema 3.1. *Diberikan P_n^m adalah graf parasut diperumum dengan $m \geq 1$ dan $n \geq 4$, maka*

$$\dim_k(P_n^m) = \begin{cases} \lceil \frac{n+5}{2} \rceil, & k = 2; \\ n + 4, & k = 3. \end{cases}$$

Bukti. Diketahui P_n^m adalah graf berdimensi 3-metrik untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 4$, artinya terdapat basis 3-metrik dan basis 2-metrik pada P_n^m . Dalam hal ini, pembuktian dibagi menjadi dua kasus, yaitu untuk $k = 2$ dan $k = 3$.

1. Untuk $k = 2$.

Dalam hal ini, pembuktian untuk $k = 2$ dibagi menjadi dua subkasus, yaitu n ganjil dan n genap.

- (a) Untuk n ganjil.

Misal dikonstruksikan himpunan $S = \{u_1, u_{2,m}, v_1, v_3, v_5, \dots, v_n\}$, akan ditunjukkan

himpunan S adalah basis 2-metrik. Berikut diberikan representasi dari setiap titik di P_n^m terhadap S .

$$\begin{aligned}
 r(u_1|S) &= (0, m+2, 1, 1, \dots, 1, 1); \\
 r(u_2|S) &= (2, m, 1, 1, \dots, 1, 1); \\
 r(u_{2,1}|S) &= (3, m-1, 1, 1, \dots, 1, 1); \\
 r(u_{2,2}|S) &= (4, m-2, 1, 1, \dots, 1, 1); \\
 &\vdots \\
 r(u_{2,m}|S) &= (m+2, 0, m+1, m+1, \dots, m+1, m+1); \\
 r(v_1|S) &= (1, m+1, 0, 2, \dots, 2, 2); \\
 r(v_2|S) &= (1, m+1, 1, 1, \dots, 2, 2); \\
 &\vdots \\
 r(v_{n-1}|S) &= (1, m+1, 2, 2, \dots, 1, 1); \\
 r(v_n|S) &= (1, m+1, 2, 2, \dots, 2, 0).
 \end{aligned}$$

Berdasarkan representasi tersebut, jika diambil suatu $W \subset S$ dengan $|W| = 2$, maka untuk setiap $u, v \in V(P_n^m)$ berlaku $r(u|W) \neq r(v|W)$.

(b) Untuk n genap.

Misal dikonstruksikan himpunan $S = \{u_1, u_{2,m}, v_1, v_3, v_5, \dots, v_{n-1}, v_n\}$, akan ditunjukkan himpunan S adalah basis 2-metrik. Berikut diberikan representasi dari setiap titik di P_n^m terhadap S .

$$\begin{aligned}
 r(u_1|S) &= (0, m+2, 1, 1, \dots, 1, 1); \\
 r(u_2|S) &= (2, m, 1, 1, \dots, 1, 1); \\
 r(u_{2,1}|S) &= (3, m-1, 1, 1, \dots, 1, 1); \\
 r(u_{2,2}|S) &= (4, m-2, 1, 1, \dots, 1, 1); \\
 &\vdots \\
 r(u_{2,m}|S) &= (m+2, 0, m+1, m+1, \dots, m+1, m+1); \\
 r(v_1|S) &= (1, m+1, 0, 2, \dots, 2, 2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r(v_2|S) &= (1, m+1, 1, 1, \dots, 2, 2); \\
 &\vdots \\
 r(v_{n-1}|S) &= (1, m+1, 2, 2, \dots, 0, 1); \\
 r(v_n|S) &= (1, m+1, 2, 2, \dots, 2, 0).
 \end{aligned}$$

Berdasarkan representasi tersebut, jika diambil $W \subset S$ dengan $|W| = 2$, maka untuk setiap $u, v \in V(P_n^m)$ berlaku $r(u|W) \neq r(v|W)$.

Dengan demikian diperoleh bahwa S adalah pembangkit 2-metrik. Selanjutnya, berdasarkan Lema 3.1, diperoleh bahwa S adalah basis 2-metrik, sehingga $\dim_2(P_n^m) = \lceil \frac{n+5}{2} \rceil$.

2. Untuk $k = 3$.

Misal dikonstruksikan himpunan $S = \{u_1, u_2, u_{2,m-1}u_{2,m}, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$, akan ditunjukkan himpunan S adalah basis 3-metrik. Berikut diberikan representasi dari setiap titik di P_n^m terhadap S .

$$\begin{aligned}
 r(u_1|S) &= (0, 2, m+1, m+2, 1, 1, \dots, 1, 1); \\
 r(u_2|S) &= (2, 0, m-1, m, 1, 1, \dots, 1, 1); \\
 r(u_{2,1}|S) &= (3, 1, m-2, m-1, 1, 1, \dots, 1, 1); \\
 r(u_{2,2}|S) &= (4, 2, m-3, m-2, 1, 1, \dots, 1, 1); \\
 &\vdots \\
 r(u_{2,m}|S) &= (m+2, m, 1, 0, m+1, m+1, \dots, m+1, m+1); \\
 r(v_1|S) &= (1, 1, m, m+1, 0, 1, \dots, 2, 2); \\
 r(v_2|S) &= (1, 1, m, m+1, 1, 0, \dots, 2, 2); \\
 &\vdots \\
 r(v_{n-1}|S) &= (1, 1, m, m+1, 2, 2, \dots, 0, 1); \\
 r(v_n|S) &= (1, 1, m, m+1, 2, 2, \dots, 1, 0).
 \end{aligned}$$

Berdasarkan representasi tersebut, jika diambil suatu $W \subset S$ dengan $|W| = 3$, maka untuk setiap $u, v \in V(P_n^m)$ berlaku $r(u|W) \neq r(v|W)$.

Dengan demikian diperoleh bahwa S adalah pembangkit 3-metrik. Selanjutnya, berdasarkan Lema 3.2, diperoleh bahwa S adalah basis 3-metrik, sehingga $\dim_3(P_n^m) = n + 4$. \square

Referensi

- [1] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs and Digraphs 2nd*. Wadsworth, Inc., 1979. [View online](#).
- [2] S. Khuller, B. Raghavachari, and A. Rosenfeld, "Landmarks in graphs," *Discrete Appl. Math*, vol. 70, pp. 230–236, 1996. [View online](#).
- [3] P. Slater, "Dominating and reference sets in graph," *Journal of Mathematical and Physical Sciences*, vol. 22, pp. 445–455, 1988. [View online](#).
- [4] G. Chartrand, L. Eroh, and O. Johnson, M.A. dan Oellermann, "Resolvability in graphs and the metric dimension of graph," *Discrete Appl. Math*, vol. 105, pp. 99–113, 2000. [View online](#).
- [5] B. Hulme, A. Shiver, and P. Slater, "A boolean algebraic analysis of fire protection," *North-Holland Mathematics Studies*, vol. 95, pp. 215–227, 1984. [View online](#).
- [6] T. A. Kusmayadi, S. Kuntari, D. Rahmadi, and F. A. Lathifah, "On the strong metric dimension of some related wheel graph," *Far East Journal of Mathematical Sciences*, vol. 99, pp. 1325–1334, 2016. [View online](#).
- [7] D. Azka, D. Palupi, and A. Sutjijana, "Dimensi metrik lokal dari hasil perkalian kuat graf bintang," *Journal Fourier*, vol. 11, pp. 49–58, 2022. [View online](#).
- [8] F. Lathifah, "Dimensi metrik lokal pada graf garis dari graf persahabatan," *Jurnal Kajian dan Terapan Matematika*, vol. 10, pp. 53–58, 2024. [View online](#).
- [9] D. Rahmadi, "Dimensi metrik campuran pada graf *double fan*," *Jurnal Diferensial*, vol. 6, pp. 52–56, 2024. [View online](#).
- [10] A. Estrada-Moreno, J. Rodriguez-Velazquez, and I. Yero, "The k-metric dimension of a graph," *Applied Mathematics and Information Sciences*, vol. 9, pp. 2829–2840, 2015. [View online](#).
- [11] A. Estrada-Moreno, J. Rodriguez-Velazquez, and I. Yero, "The k-metric dimension of corona product graph," *Bull. Malays. Math. Sci.*, vol. 39, pp. 135–136, 2015. [View online](#).

- [12] D. Rahmadi and Y. Susanti, "The k -metric dimension of double fan graph," *Quadratic: Journal of Innovation and Technology in Mathematics and Mathematics Education*, vol. 2, pp. 31–35, 2022. [View online](#).
- [13] I. Yero, A. Estrada-Moreno, and J. Rodriguez-Velazquez, "Computing the k -metric dimension of a graph," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 300, pp. 60–69, 2017. [View online](#).

Format Sitasi IEEE:

D. Rahmadi dan Y. Susanti, "Dimensi k -Metrik Pada Graf Parasut Diperumum", *Jurnal Diferensial*, vol. 6(2), pp. 179-187, 2024.

This work is licensed under a [Creative Commons "Attribution-ShareAlike 4.0 International"](#) license.

