J. DIFERENSIAL/e-ISSN:2775-9644
Vol.6(2),2024, 188–192
doi:https://doi.org/10.35508/jd.v6i2.17392

ARTIKEL PENELITIAN

Catatan terhadap Turunan Fungsi Bernilai Real pada Ruang Metrik Diskrit

Syamsuddin Mas'ud[1,*]

[1]*Program Studi Matematika, Universitas Negeri Makassar, Makassar-Sulawesi Selatan, Indonesia*
[*]*Penulis korespondensi: syamsuddinm@unm.ac.id*

Diterima: 11 Juli 2024; Direvisi: 5 Oktober 2024; Disetujui: 27 Oktober 2024; Dipublikasi:1 November 2024.

Abstrak: Dalam catatan ini, akan diberikan komentar pada artikel yang ditulis oleh Herdiana et al. (Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika: 15(2), 2023). Dalam tulisan tersebut, diberikan definisi turunan dari suatu fungsi dalam ruang metrik, beserta sifat-sifat yang melibatkan ruang metrik diskrit. Tujuan dari catatan ini adalah untuk mengomentari bagian yang melibatkan ruang metrik diskrit, khususnya di mana turunan didefinisikan untuk fungsi pada ruang metrik diskrit, padahal ruang metrik diskrit tidak memiliki titik limit. Selain itu, jika definisi turunan diubah untuk mengakomodasi ruang metrik diskrit, hal tersebut akan mengakibatkan nilai turunan yang tidak tunggal. Ini membuat pembahasan tentang turunan fungsi pada ruang metrik diskrit menjadi tidak bermakna.

Kata Kunci: Ruang Metrik Diskrit, Turunan, Fungsi

Abstract: In these notes, comments will be provided on the paper by Herdiana et al. (Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika: 15(2), 2023). In that paper, a definition of the derivative of a function in a metric space is given, along with properties involving discrete metric spaces. The purpose of these notes is to comment on the section involving discrete metric spaces, specifically where a derivative is defined for functions in a discrete metric space, despite that discrete metric spaces do not have limit points. Additionally, if certain modifications are made to the definition of the derivative to accommodate discrete metric spaces, it would result in the derivative values not being unique. This makes the discussion of the derivative of functions in discrete metric spaces meaningless.

Keywords: Discrete Metric Spaces, Derivative, Function

1. Pendahuluan

Matematika analisis umumnya dipahami sebagai cabang dari matematika dengan penggunaan dari berbagai konsep limit dilakukan secara sistematis [1]. Salah satu bentuk khusus dari pembahasan mengenai konsep limit adalah yang dibahas pada kalkulus diferensial. Dikatakan khusus, karena pada kalkulus diferensial terdapat syarat yang tidak dituliskan saat berbicara tentang limit, dalam hal ini limit fungsi. Syarat tersebut adalah syarat yang terkait dengan istilah titik limit atau titik cluster. Istilah ini sendiri merupakan syarat yang harus terpenuhi sebelum berbicara tentang limit fungsi pada matematika analisis.

Pendefinisian limit yang diberikan pada kalkulus diferensial yaitu dalam versi $\epsilon - \delta$. Adapun dalam matematika analisis, selain dalam versi $\epsilon - \delta$, juga dapat diberikan dalam versi topologi, ataupun dalam versi barisan. Namun dalam semua versi ini, pada matematika analisis mengharuskan untuk menggunakan istilah titik limit. Terkait titik limit ini, Shirali dan Vasudeva [2] menjelaskan bahwa suatu titik $a \in \mathbb{R}$ dikatakan titik limit dari himpunan $X \subset \mathbb{R}$ jika setiap persekitaran ϵ dari titik a yaitu $(a - \epsilon, a + \epsilon), \epsilon > 0$, berlaku bahwa

$$\exists x \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \backslash \{a\}, x \in X.$$

Terkait persekitaran ϵ dari titik a tersebut, dapat juga dinotasikan sebagai $V_\epsilon(a)$. Berikut ini diberikan definisi limit fungsi untuk versi $\epsilon - \delta$ dan versi topologi oleh Abbott [3].

Definisi 1.1. [3] [Versi Topologi] Diberikan $f : A \to \mathbb{R}$ dan c adalah titik limit dari domain A. Dikatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$, jika untuk setiap persekitaran ϵ dari $L, V_\epsilon(L)$, berlaku bahwa

$$\exists \delta > 0, x \in V_\delta(c) \text{ dan } x \in A \Rightarrow f(x) \in V_\epsilon(L).$$

Definisi 1.2. [4] [Versi $\epsilon - \delta$] Diberikan $f : A \to \mathbb{R}$ dan c adalah titik limit dari domain A. Dikatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$, jika

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - c| < \delta \text{ dan } x \in A \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Salah satu penggunaan dari konsep limit ini adalah pada konstruksi dari konsep turunan. Turunan merupakan konsep dalam matematika yang memiliki peran cukup signifikan mengingat aplikasinya yang sangat banyak. Aplikasi itu di antaranya dalam geometri, masalah optimum, pemodelan, dan lain – lain. Berikut ini diberikan definisi turunan untuk fungsi bernilai real [1].

Definisi 1.3. [1] Diberikan interval $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ dan $c \in I$. Bilangan real L dikatakan turunan dari f di c jika

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in I \text{ dan } 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L| < \epsilon.$$

Dalam hal ini, fungsi f terdiferensial di c dan ditulis $L = f'(c)$. Dengan kata lain

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Karena itu keberadaan turunan dari suatu fungsi di titik tertentu mensyaratkan eksistensi dari bentuk limit yang diberikan di titik tersebut. Karena itu juga, ketika berbicara tentang turunan fungsi f di c mengharuskan bahwa c adalah titik limit dari domain f.

Dalam perkembangan ilmu matematika, banyak dilakukan perumuman pada konsep – konsep di dalamnya, termasuk konsep limit maupun turunan. Dibantara metode yang ditempuh adalah dengan memperumum atau mengganti domain fungsinya, khususnya metrik yang digunakan domain tersebut. Sejauh yang diberikan di atas, konsep – konsep tersebut dibangun pada himpunan yang menggunakan metrik biasa. Padahal, konsep metrik sendiri ada banyak macamnya [5] [6] [7] [8] [9] [10]. Karena itu, terdapat banyak hal yang dapat dieksplorasi di dalamnya.

Kajian tentang turunan telah dilakukan oleh [11] dengan membahas tentang turunan absolut pada ruang metrik, yang pada tulisannya itu dinamakan turunan mutlak. Salah satu bentuk eksplorasi lain tentang turunan absolut yaitu dengan meninjau turunan yang didefinisikan pada ruang metrik diskrit untuk fungsi – fungsi tertentu. Hal ini telah dilakukan oleh [12] dalam salah satu tulisannya yang membahas tentang metode Newton Raphson untuk fungsi bernilai real pada ruang metrik diskrit. Dalam tulisan tersebut ditemukan suatu konsep yang dibangun dengan konsep metrik diskrit. Pada bagian ini terdapat suatu kejanggalan dalam konstruksi sifat yang melibatkan turunan dan ruang metrik diskrit tersebut. Karena itu, dilakukan telaah secara lebih mendalam terkait kejanggalan tersebut.

2. Kajian Literatur

Sebelum membahas tentang konsep yang menjadi fokus permasalahan pada tulisan ini, terlebih dahulu diberikan beberapa definisi – definisi beberapa konsep terkait. Di antaranya tentang definisi ruang metrik, definisi metrik diskrit, definisi limit, definisi turunan, dan konsep lain yang diperlukan.

Kreyszig [13] menjelaskan bahwa dalam kalkulus dipelajari fungsi – fungsi yang didefinisikan pada garis bilangan real R. Dia juga menyatakan bahwa dengan sedikit refleksi, disadari bahwa dalam memproses limit dan dalam banyak pertimbangan lainnya, digunakan fakta bahwa terdapat fungsi jarak yang bekerja pada $\mathbb{R}$.

Definisi 2.1. [14] [15] Ruang metrik (X, d) adalah himpunan tak kosong X yang elemen - elemennya bersama dengan fungsi bernilai real d, yang didefinisikan pada $X \times X$ sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

i. $d(x, y) \geq 0$;

ii. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

iii. $d(x, y) = d(y, x)$;

iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Fungsi d disebut metrik.

Apabila metrik yang bekerja pada suatu himpunan X tidak diberikan secara khusus maka metriknya dinotasikan dengan d_X. Berikut ini diberikan contoh suatu ruang metrik.

Contoh 2.1. Diberikan himpunan $\mathbb{R}$ dan $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dengan pendefinisian $d(x, y) = 0$ jika $x = y$ dan $d(x, y) = 1$ jika $x \neq y$. Dapat dibuktikan bahwa $(\mathbb{R}, d)$ membentuk ruang metrik. Ruang metrik ini dinamakan dengan ruang metrik diskrit.

Pada pembahasan sebelumnya, telah diberikan definisi limit fungsi untuk fungsi – fungsi berdomain $\mathbb{R}$ (dalam arti menggunakan metrik biasa). Berikutnya akan diberikan definisi limit fungsi yang melibatkan ruang metrik secara umum.

Definisi 2.2. [16] Diberikan dua ruang metrik X dan Y, $E \subseteq X$ sehingga $f : E \to Y$, dan p titik limit E. Limit f di p dikatakan ada jika terdapat $q \in Y$ dengan sifat,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in E \text{ dan } 0 < d_X(x, p) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), q) < \epsilon.$$

Limit ini dinotasikan dengan

$$\lim_{x \to p} f(x) = q.$$

Berdasarkan definisi limit pada ruang metrik secara umum, beberapa peneliti juga mengkonstruksi definisi turunan pada ruang metrik. Definisi turunan ini diberikan oleh [17] dengan bentuk sebagai berikut.

Definisi 2.3. [17] Diberikan dua ruang metrik (X, d_X) dan (Y, d_Y), $f : X \to Y$, dan $p \in X$. Dikatakan bahwa f memiliki turunan absolut di p jika limit berikut ada:

$$\lim_{x \to p} \frac{d_Y(f(x), f(p))}{d_X(x, p)}.$$

Turunan ini dinotasikan dengan $f'(p)$.

3. Hasil dan Pembahasan

Ruang metrik diskrit $(\mathbb{R}, d)$ merupakan ruang yang tidak memiliki titik limit. Hal ini dapat ditunjukkan dengan mengambil $\delta = 1/2$ sehingga untuk setiap $c \in \mathbb{R}$ dan $A \subseteq \mathbb{R}$ berlaku

$$A \cap V_\delta(c) \backslash \{c\} = \emptyset.$$

Berdasarkan hal tersebut maka akan muncul masalah pada konstruksi Teorema 2.1 dan Teorema 2.2 pada [12]. Masalah pertama pada kedua teorema tersebut yaitu fakta bahwa konstruksi ini bekerja pada domain di ruang metrik diskrit di mana ruang metrik ini tidak memiliki titik limit. Padahal pendefinisian turunan pada Definisi 2.3 melibatkan definisi limit yang diberikan pada Definisi 2.2. Sedangkan pada definisi limit pada ruang metrik mengharuskan titik c merupakan titik limit (dengan asumsi limit fungsi yang dimaksud adalah limit di titik c).

Dilain pihak, jika diinginkan untuk mendefinisikan turunan tanpa mensyaratkan c sebagai titik limit (untuk mengakomodir ruang metrik diskrit), maka dapat dibangun definisi turunan yaitu untuk dua ruang metrik (X, d_X) dan (Y, d_Y), $f : E \subseteq X \to Y$, dan $c \in X$, dikatakan bahwa L merupakan turunan absolut f di c jika

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in E \text{ dan } 0 < d_X(x, c) < \delta \Rightarrow |\frac{d_Y(f(x), f(c))}{d_X(x, c)} - L| < \epsilon.$$

Pada konstruksi terakhir ini, sepintas nampak bahwa turunan absolut pada ruang metrik diskrit dapat dijalankan. Namun masalah yang kemudian muncul adalah, turunannya menjadi tidak tunggal. Misalnya untuk Teorema 2.1 pada [12] yang menyatakan bahwa turunan absolut pada fungsi injektif $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (di mana fungsi ini bekerja pada ruang metrik diskrit) dengan A himpunan terbuka, adalah $f'(x) = 1, \forall x \in A$, ternyata dapat juga dibuktikan bahwa untuk sebarang $L \neq 1$ memenuhi $f'(x) = L, \forall x \in A$ menurut definisi terakhir ini. Hal ini dapat dengan mudah ditunjukkan dengan mengambil $\delta = 1/2$ sehingga diperoleh bahwa bentuk $x \in A$ dan $0 < d_X(x, c) < \delta$ menjadi tidak mungkin (bernilai salah). Akibatnya, $L \neq 1$ juga dapat dijalankan pada definisi tersebut. Akan tetapi, apabila hal ini dianggap mungkin, maka membicarakan turunan pada ruang metrik diskrit menjadi tidak berarti. Berikut ini diberikan Contoh 2.1 pada [12] untuk memperjelas hal tersebut.

Contoh 3.1. Diberikan himpunan $A = (0, \frac{\pi}{2})$ dan $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dengan pendefinisian $f(x) = \sin(x)$ untuk semua $x \in A$. Fungsi ini memiliki domain dan kodomain berupa ruang pada metrik diskrit d. Menurut [12], diperoleh bahwa $f'(c) = 1$ untuk semua $c \in A$. Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa dengan definisi terakhir yang dibangun maka didapat juga bahwa $f'(c) = 0$ untuk semua $c \in A$. Perhatikan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, pilih $\delta = \frac{1}{3} > 0$. Diperoleh bahwa untuk semua $x \in A$, tidak mungkin berlaku $0 < d(x, c) < \delta$. Akibatnya,

$$0 < d(x, c) < \delta \Rightarrow |\frac{d(f(x), f(c))}{d(x, c)} - 0| < \epsilon$$

selalu bernilai benar. Jadi terbukti juga $f'(c) = 0$ untuk semua $c \in A$.

Berdasarkan penjelasan dan contoh di atas maka tidak mungkin untuk mendefinisikan turunan fungsi pada ruang metrik diskrit dengan perspektif turunan absolut.

Referensi

[1] R. Bartle and D. Sherbert, *Introduction to Real Analysis, Fourth Edition*. John Wiley & Sons, Inc, 2011. View online.

[2] S. Shirali and H. Vasudeva, *Metric Spaces*. Springer, 2006. View online.
[3] S. Abbott, *Understanding Analysis, Second Edition*. Springer, 2015. View online.
[4] J. Hunter, *An Introduction to Real Analysis*. Department of Mathematics, University of California at Davis, 2012. View online.
[5] B. Hazarika, S. Acharjee, and D. Djordjević, *Advances in Functional Analysis and Fixed-Point Theory: An Interdisciplinary Approach*. Springer, 2023. View online.
[6] B. Acharjee and G. M, "Fixed point theorem and iterated function system in φ-metric modular space," *Fixed Point Theory Algorithms Sci Eng*, vol. 5, pp. 1–18, 2024. View online.
[7] G. Mani, M. Antony, Z. Mitrović, A. Aloqaily, and N. Mlaiki, "A fixed point result on an extended neutrosophic rectangular metric space with application," *Bound Value Probl 2024*, vol. 13, pp. 1–26, 2024. View online.
[8] A. Hijab, L. Shaakir, S. Aljohani, and N. Mlaiki, "Fredholm integral equation in composed-cone metric spaces," *Bound Value Probl 2024*, vol. 64, pp. 1–12, 2024. View online.
[9] G. Janardhanan, G. Mani, O. Ege, V. Varadharajan, and R. George, "Orthogonal neutrosophic 2-metric spaces," *J Inequal Appl 2023*, vol. 112, pp. 1–20, 2023. View online.
[10] C. Harrafa and A. Mbarki, "Homothetic rectangular metric space and contraction principles," *J Anal (2024)*, 2024. View online.
[11] W. Kusuma and D. Yunianti, "Sifat-sifat turunan mutlak fungsi pada ruang metrik," *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, vol. 3, pp. 74–79, 2017. View online.
[12] I. Herdiana, I. Sihwaningrum, and A. Sugandha, "The newton-raphson method of real-valued functions in discrete metric space," *Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika*, vol. 15, pp. 113–128, 2023. View online.
[13] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, Inc, 1978. View online.
[14] H. Royden, *Real Analysis, Forth Edition*. Pearson, 1988. View online.
[15] R. Sen, *A First Course in Functional Analysis: Theory and Applications*. Anthem Press, 2013. View online.
[16] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis, Third Edition*. McGraw-Hill, Inc, 1976. View online.
[17] W. Charatonik and M. Insall, "Absolute differentiation in metric spaces," *Houston Journal of Mathematics*, vol. 38, pp. 1312–1328, 2012. View online.

Format Sitasi IEEE:
S. Mas'ud, "*Catatan terhadap Turunan Fungsi Bernilai Real pada Ruang Metrik Diskrit*", *Jurnal Diferensial*, vol. 6(2), pp. 188-192, 2024.