J. DIFERENSIAL/E-ISSN:2775-9644
Vol.6(2),2024, 193–199
doi:https://doi.org/10.35508/jd.v6i2.17958

ARTIKEL PENELITIAN

# Kaitan Fungsi Gamma terhadap Fungsi Trigonometri

**Zaidulkhair Hamzi**[1], **Syamsuddin Mas'ud**[1,*], **Alimuddin**[2]

[1]*Program Studi Matematika, Universitas Negeri Makassar, Makassar, Indonesia*
[2]*Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Makassar, Makassar, Indonesia*
[*]*Penulis korespondensi: syamsuddinm@unm.ac.id*

*Diterima: 1 Agustus 2024; Direvisi: 6 Oktober 2024; Disetujui: 29 Oktober 2024; Dipublikasi:1 November 2024.*

**Abstrak**: Tulisan ini merupakan studi literatur tentang kaitan antara faktorial riil yang dinotasikan dengan fungsi gamma terhadap fungsi trigonometri. Tujuan studi ini adalah untuk membuktikan kaitan tersebut dengan metode yang berbeda dari apa yang telah dilakukan oleh Goerge E. Andrews pada buku "special function". Pada tulisan Goerge, kaitan tersebut dibuktikan dengan menggunakan definisi fungsi gamma dalam bentuk integral. Adapun pada tulisan ini, pembuktian dilakukan dengan menggunakan definisi fungsi gamma dalam bentuk lain selain integral.

**Kata Kunci:** Faktorial, Fungsi Gamma, Integral, Trigonometri

**Abstract**: This paper is a literature study on the relationship between real factorials denoted by gamma functions to trigonometric functions. The main objective of this study is to prove the relationship with a different method from what has been done by George E. Andrews in the book "special functions". In Goerge's paper, the connection is proved by using the definition of the gamma function in integral form. As for this paper, the proof is done by using the definition of gamma function in a form other than integral.

**Keywords:** Factorial, Gamma Function, Integral, Trigonometry

## 1. Pendahuluan

Faktorial adalah konsep yang menunjukkan hasil dari perkalian semua bilangan bulat positif dari 1 hingga suatu bilangan bulat positif tertentu. Faktorial bukan hanya merupakan alat penting dalam kalkulus dan statistik, tetapi juga muncul dalam perhitungan probabilitas dan kombinatorika [1]. Secara umum, faktorial dari sebuah bilangan bulat positif $k$, dilambangkan dengan $k!$, didefinisikan sebagai persamaan 1.1,

$$k! = k \times (k-1) \times (k-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1. \tag{1.1}$$

Notasi $k!$ untuk faktorial diperkenalkan oleh matematikawan Prancis, Christian Kramp pada tahun 1808. Kata "faktorial" (bahasa asli Prancis: *factorielle*) pertama kali digunakan pada tahun 1800 oleh Louis François Antoine Arbogast, dalam karya pertama tentang rumus Faà di Bruno [2] tetapi mengacu pada konsep yang lebih umum tentang hasil perkalian aritmatika. "Faktor-faktor" yang dirujuk oleh nama ini adalah istilah-istilah dalam rumus produk faktorial.

Di lain pihak, konsep fungsi gamma ternyata dapat dikaitkan dengan konsep faktorial [3]. Fungsi gamma tentu saja merupakan konsep yang banyak dikaji oleh para peneliti [4] [5] [6]. Selain itu, dalam banyak buku referensi pun telah banyak membahas tentang fungsi gamma [7] [8] [9].

Dalam konteks faktorial riil, kita tidak hanya mempertimbangkan bilangan bulat positif, tetapi juga memperluas definisi ini ke bilangan riil non-negatif. Ada banyak sekali cara untuk memperluas faktorial menjadi fungsi kontinu [3]. Menurut [10] [11], yang paling banyak digunakan adalah menggunakan fungsi gamma, yang dapat didefinisikan untuk bilangan real positif sebagai integral tak wajar 1.2

$$(x-1)! = \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt, \tag{1.2}$$

dengan $x \in \mathbb{R}^+$ dan $t$ adalah variabel integrasi. Untuk lebih jelasnya, diberikan contoh terkait sebagai berikut,

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}\,dt.$$

Subtitusi $u = \sqrt{t} \Leftrightarrow u^2 = t$, dan $dt = 2udu$,

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}\,dt = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du. \tag{1.3}$$

Menurut [12], integral 1.3 dikenal dengan integral gaussian $\int_0^\infty e^{-u^2}\,du$ yang hasilnya adalah $\frac{\pi}{2}$, akibatnya $2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$.

Penting untuk dicatat bahwa faktorial riil memiliki keterkaitan dengan fungsi trigonometri. Seperti salah satu sifat faktorial riil yang dinotasikan sebagai fungsi gamma 1.2 dalam persamaan 1.4 yaitu

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

Persamaan 1.4 tersebut dinamakan rumus refleksi Euler [13]. Untuk bukti lebih jelasnya dapat dilihat pada [14] dan [11] dengan pendefinisian fungsi gamma dalam bentuk representasi integral. Oleh karena itu, tulisan ini bertujuan untuk membuktikan persamaan 1.4 dengan pendefinisian fungsi gamma yang berbeda, kemudian menambahkan beberapa akibat dari teorema refleksi euler tersebut.

## 2. Kajian Teori

### *2.1. Fungsi Gamma*

Menurut [4], fungsi gamma didefinisikan sebagai :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt,$$

untuk $x \in \mathbb{R}^+$. Perhatikan bahwa untuk $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^x\,dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}t^x\,dt \\
&= \lim_{b\to\infty}([-e^{-t}t^x]_0^b + x\int_0^b e^{-t}t^{x-1}\,dt) \\
&= x\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}t^{x-1}\,dt \\
&= x\Gamma(x).
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh sifat bahwa untuk $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{2.5}$$

Selanjutnya, menurut [13], domain dari sifat 2.5 dapat diperluas menjadi $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2, ...\}$ dengan bentuk sebagai berikut.

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}. \tag{2.6}$$

Akibatnya $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2, ...\}$, berlaku sifat

$$\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x). \tag{2.7}$$

Bentuk lain dari $\Gamma(x)$ pada [11], yaitu

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{x-1}n!}{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)} \tag{2.8}$$

untuk $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2, ...\}$.

### 2.2. *Trigonometri*

Menurut [15], hasil kali tak berhingga untuk sinus dan cosinus sebagai berikut,

$$\sin(\pi x) = \pi x \Pi_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x^2}{n^2}), \tag{2.9}$$

$$\cos(\pi x) = \Pi_{n=0}^{\infty}(1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2}). \tag{2.10}$$

Berdasarkan sifat trigonometri, terdapat kesamaan dalam nilai trigonometri yang dapat dilihat pada persamaan

$$\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x), \tag{2.11}$$

$$\tan(x) = \cot(\frac{\pi}{2} - x), \tag{2.12}$$

$$\sec(x) = \csc(\frac{\pi}{2} - x). \tag{2.13}$$

## 3. Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan definisi 2.8 dan 2.9, berikut ini akan diberikan bukti persamaan refleksi euler dengan pendekatan yang berbeda dari sebelumnya.

**Teorema 3.1.** *Jika* $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ *maka* $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(x\pi)}$.

***Bukti***. Misalkan $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Sebagai langkah pertama, yaitu mengalikan bagian atas dan bawah dengan $x$,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{x\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{x}.$$

Hal ini dilakukan agar dapat menggunakan rumus rekursif untuk mendapatkan ekspresi dalam bentuk yang lebih simetris, maka dari itu berdasarkan rumus rekursif untuk fungsi gamma 2.5,

$$\frac{x\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{x} = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(1-x)}{x}.$$

Sekarang, dengan definisi gamma 2.8,

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(1-x)}{x} &= \frac{(\lim_{N\to\infty} N^{x+1-1}\Pi_{n=1}^{N}\frac{n}{n+x+1-1})(\lim_{N\to\infty} N^{1-x-1}\Pi_{n=1}^{N}\frac{n}{n+1-x-1})}{x} \\
&= \frac{(\lim_{N\to\infty}\Pi_{n=1}^{N}\frac{n}{n+x})(\lim_{N\to\infty}\Pi_{n=1}^{N}\frac{n}{n-x})}{x} \\
&= \frac{\Pi_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+x})(\frac{n}{n-x})}{x} \\
&= \frac{1}{x\Pi_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x}{n})(1-\frac{x}{n})} \\
&= \frac{1}{x\Pi_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2})}.
\end{aligned}
$$

Dengan kata lain, diperoleh persamaan

$$
\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{1}{x\Pi_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2})}. \tag{3.14}
$$

Sekarang, dengan melihat kembali rumus hasil kali sinus 2.9, maka

$$
\begin{aligned}
\pi x\Pi_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2}) &= \sin(\pi x), \\
x\Pi_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2}) &= \frac{\sin(\pi x)}{\pi}, \\
\frac{1}{x\Pi_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2})} &= \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.
\end{aligned}
$$

Rumus hasil kali sinus 2.9 memiliki bentuk yang sama dengan persamaan 3.14 sehingga didapatkan persamaan 1.4 yang dinamakan dengan Refleksi Euler,

$$
\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}.
$$

□

Berikut diberikan contoh sederhana untuk memudahkan dalam memahami Refleksi Euler.

**Contoh 3.1.** Dengan menggunakan Teorema 3.1, jika $x = \frac{1}{2}$ maka

$$
\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}) &= \pi \\
\Gamma(\frac{1}{2}) &= \sqrt{\pi}.
\end{aligned}
$$

Sehingga, nilai dari $\Gamma(\frac{1}{2})$ adalah $\sqrt{\pi}$. Hasil ini sesuai dengan nilai sebelumnya, yang diperoleh melalui definisi gamma dalam bentuk integral.

Berikut diberikan salah satu sifat yang merupakan akibat dari teorema Refleksi Euler.

**Teorema 3.2.** *Jika* $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, *maka*

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x\sin(\pi x)}.$$

***Bukti.*** Dengan menggunakan sifat 2.7 dan Teorema 3.1, diperoleh

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(-x) &= \frac{\Gamma(x) - x\Gamma(-x)}{-x} \\ &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{-x} \\ &= \frac{\pi}{-x\sin(\pi x)}.\end{aligned}$$

□

Berikut diberikan sifat yang merupakan akibat lainnya dari teorema Refleksi Euler.

**Teorema 3.3.** *Jika* $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, *maka*

$$\Gamma(1-x)\Gamma(1+x) = \frac{\pi x}{\sin(\pi x)}.$$

***Bukti.*** Dengan menggunakan sifat 2.8 dan Teorema 3.1, diperoleh

$$\begin{aligned}\Gamma(1-x)\Gamma(1+x) &= \Gamma(1-x)x\Gamma(x) \\ &= \frac{x\pi}{\sin(\pi x)}.\end{aligned}$$

□

**Contoh 3.2.** Dengan menggunakan Teorema 3.3, dapat ditentukan nilai dari $\Gamma(\frac{3}{2})$, misalkan $x = \frac{1}{2}$, maka

$$\Gamma(1-\frac{1}{2})\Gamma(1+\frac{1}{2}) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin(\frac{\pi}{2})},$$

$$\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\pi}{2}.$$

Menurut Contoh 3.1, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, sehingga

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\pi}{2\sqrt{\pi}},$$

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**Teorema 3.4.** *Misalkan* $A = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{2k+1}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, *jika* $x \notin A$, *maka*

$$\Gamma(\frac{1}{2}+x)\Gamma(\frac{1}{2}-x) = \frac{\pi}{\cos(\pi x)}.$$

***Bukti***. Berdasarkan Teorema 3.1 dan misalkan $x = \frac{1}{2} + s$ pada Teorema 3.1, diperoleh

$$\Gamma(\frac{1}{2} + s)\Gamma(1 - \frac{1}{2} - s) = \frac{\pi}{\sin((\frac{1}{2} + s)\pi)},$$

$$\Gamma(\frac{1}{2} + s)\Gamma(\frac{1}{2} - s) = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2} + \pi s)}.$$

Berdasarkan sifat kesamaan trigonometri 2.13, maka diperoleh

$$\Gamma(\frac{1}{2} + s)\Gamma(\frac{1}{2} - s) = \frac{\pi}{\cos(\pi s)}.$$

□

Berikut ini diberikan contoh penggunaan dari Teorema 3.4.

**Contoh 3.3.** Dengan menggunakan Teorema 3.4, dapat juga diperlihatkan bahwa $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Misalkan $x = 1$ pada Teorema 3.4, maka

$$\Gamma(\frac{1}{2} + 1)\Gamma(\frac{1}{2} - 1) = \frac{\pi}{\cos(\pi)},$$

$$\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(-\frac{1}{2}) = -\pi.$$

Karena $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$, maka

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{-\pi}{-2\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

## 4. Kesimpulan

Pada tulisan [14], pembuktian Refleksi Euler dilakukan dengan menggunakan definisi fungsi gamma dalam bentuk integral. Hal ini juga dilakukan pada [11], pembuktian Refleksi Euler menggunakan definisi fungsi gamma dalam bentuk integral, kemudian menggunakan subtitusi jacobian. Sedangkan, pada tulisan ini, teorema Refleksi Euler telah berhasil dibuktikan dengan pendekatan yang berbeda yaitu mendefinisikan fungsi gamma dengan persamaan 2.8. Pendekatan ini tidak melibatkan bentuk integral sama sekali.

## Referensi


[1] J. Pitman, *Probability*. Springer-Verlag New York, Inc., 1993. View online.

[2] A. Craik, "Prehistory of faà di bruno's formula," *The American Mathematical Monthly*, vol. 112, pp. 119–130, 2005. View online.

[3] P. Davis, "Leonhard euler's integral: A historical profile of the gamma function," *The American Mathematical Monthly*, vol. 66, pp. 849–869, 1959. View online.

[4] D. Tcheutia, "The gamma function. in: Foupouagnigni, m., koepf, w. (eds) orthogonal polynomials," *AIMSVSW 2018. Tutorials, Schools, and Workshops in the Mathematical Sciences*, pp. 155–161, 2020. View online.

[5] R. Goenka and G. Srinivasan, "Gamma function and its functional equations," *Reson 26*, pp. 367—-386, 2021. View online.

[6] Q. Wang and X. Yao, "Difference independence of the euler gamma function," *Chin. Ann. Math. Ser.*, vol. 44, pp. 481—-488, 2023. View online.

[7] C. Little, K. Teo, and B. Van Brunt, *The Gamma Function. In: An Introduction to Infinite Products*. Springer, Cham, 2022. View online.

[8] P. Mercer, *The Probability Integral and Gamma Function. In: A Compact Capstone Course in Classical Calculus. Compact Textbooks in Mathematics*. Birkhäuser, Cham, 2023. View online.

[9] I. Zalduendo, *The Gamma Function. In: Calculus off the Beaten Path. Springer Undergraduate Mathematics Series*. Springer, Cham, 2022. View online.

[10] J. Borwein and R. Corless, "Gamma and factorial in the monthly," *Am. Math. Mon.*, vol. 125, pp. 400–424, 2018. View online.

[11] G. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Special Function*. Cambridge University Press, 2013. View online.

[12] C. Nicholas and R. Yates, "The probability integral," *The American Mathematical Monthly*, vol. 57, pp. 412–413, 1950. View online.

[13] J. Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant*. Princeton University Press, 2003. View online.

[14] E. Stein and R. Shakarchi, *Complex Analysis*. Princeton University Press, 2003. View online.

[15] D. Salwinski, "Euler's sine product formula: An elementary proof," *Coll. Math. J.*, vol. 49, pp. 126–135, 2018. View online.

Format Sitasi IEEE:
Hamzi dkk., *"Kaitan Fungsi Gamma terhadap Fungsi Trigonometri"*, *Jurnal Diferensial*, vol. 6(2), pp. 193-199, 2024.