J. DIFERENSIAL/E-ISSN:2775-9644
Vol.7(1),2025, 38–46
doi:https://doi.org/10.35508/jd.v7i1.18227

ARTIKEL PENELITIAN

Indeks Harmonik, Randic, dan Gutman dari Graf Koprima Prima untuk Grup Bilangan Bulat Modulo

Abdurahim[1], Jihadil Qudsi[2*], Siti Muawanah[3], Salwa[4]

[1,4]*Program Studi Matematika, Universitas Mataram, Indonesia*
[2]*Program Studi Statistik, Universitas Mataram, Indonesia*
[3]*Program Studi Matematika, Universitas Negeri Semarang, Indonesia*
[*]*Penulis korespondensi: jihadilqudsi@staff.unram.ac.id*

Diterima: 23 Agustus 2024; Direvisi: 24 Februari 2025; Disetujui: 2 Maret 2025; Dipublikasi:5 April 2025.

Abstrak: Graf koprima prima dari grup bilangan bulat adalah graf yang himpunan simpulnya adalah semua anggota grup. Dua buah simpul berbeda dikatakan dikatakan bertetangga jika faktor persekutuan terbesar dari order kedua simpul tersebut sama dengan 1 atau prima. Lebih jauh, grup bilangan bulat yang dikaji adalah $\mathbb{Z}_n$ di mana $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$. Artikel ini menghasilkan rumus umum dari beberapa indeks, yaitu Harmonik, Randic, dan Gutman.

Kata Kunci: graf koprima prima, indeks harmonik, indeks randic, indeks gutman

Abstract: The prime coprime graph of an integer group is a graph where the set of vertices consists of all the group elements. Two distinct vertices are said to be adjacent if the greatest common divisor of the orders of the two vertices is either 1 or a prime number. Furthermore, the group of integers being studied is $\mathbb{Z}_n$ where $n = p^k$ with p is a prime and $k \geq 2$. This article presents the general formula for various indices, including Harmonic, Randic, and Gutman.

Keywords: prime coprime graph, harmonic index, randic index, gutman index

1. Pendahuluan

Representasi graf dan indeks topologi telah menjadi topik yang penting dalam berbagai disiplin ilmu, termasuk kimia, biologi, dan ilmu komputer. Graf merupakan struktur matematis yang terdiri dari himpunan simpul (*vertex*) yang dihubungkan oleh sisi (*edge*) [1]. Dalam konteks kimia, misalnya, molekul dapat direpresentasikan sebagai graf, di mana atom-atom dianggap sebagai simpul dan ikatan antar atom sebagai sisi [2]. Indeks topologi adalah angka yang diperoleh dari graf yang menggambarkan molekul atau sistem lainnya dan digunakan untuk menganalisis berbagai sifat kimia dan fisik suatu senyawa. Beberapa indeks topologi yang populer antara lain indeks Harmonik, indeks Randic, dan indeks Gutman.

Indeks topologi tersebut dapat dikaji dari beberapa graf. Indeks Harmonik dan Gutman dari graf koprima pada grup bilangan bulat modulo dengan order pangkat prima [3], graf koprima pada grup dihedral dengan order pangkat prima [4], graf pangkat pada bilangan bulat modulo dengan order pangkat prima [5], dan graf nilradikal pada gelanggang komutatif dengan satuan [6]. Selain itu, terdapat kajian indeks Gutman untuk graf pangkat dari grup hihedral [7].

Dari paparan di atas, terdapat perhitungan indeks dari beberapa graf. Akan tetapi belum ada yang mengkaji indeks topologi dari graf koprima prima. Kajian dari graf tersebut hanya sebatas karakteristik grafnya dan ini sudah dilakukan oleh [8]. Graf koprima prima merupakan graf dengan dua simpul berbeda dikatakan bertetangga jika dan hanya jika faktor persekutuan terbesar dari orde simpul tersebut sama dengan 1 atau prima [8].

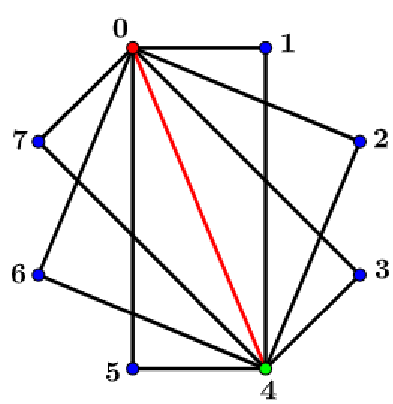
Pada paper ini akan dibahas indeks topologi dari graf koprima prima pada grup bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_n$ di mana $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat. Lebih jauh, indeks yang akan dibahas pada paper ini adalah indeks Harmonik, Randic, dan Gutman. Graf koprima prima dari grup bilangan bulat dinotasikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$.

Misal diberikan grup $\mathbb{Z}_8$, maka order dari elemen grup tersebut adalah $|0| = 1$, $|1| = 8$, $|2| = 4$, $|3| = 8$, $|4| = 2$, $|5| = 8$, $|6| = 4$ dan, $|7| = 8$. Selanjutnya dapat diperoleh tabel ketetanggaan dari graf $\mathbb{Z}_8$ berikut

Tabel 1.1: Tabel ketetanggaan Graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_8}$

order	$\|0\|$	$\|1\|$	$\|2\|$	$\|3\|$	$\|4\|$	$\|5\|$	$\|6\|$	$\|7\|$
$\|0\|$		$(0,1)=1$	$(0,2)=1$	$(0,3)=1$	$(0,4)=1$	$(0,5)=1$	$(0,6)=1$	$(0,7)=1$
$\|1\|$	$(1,0)=1$		$(1,2)=4$	$(1,3)=8$	$(1,4)=2$	$(1,5)=8$	$(1,6)=4$	$(1,7)=8$
$\|2\|$	$(2,0)=1$	$(2,1)=4$		$(2,3)=4$	$(2,4)=2$	$(2,5)=4$	$(2,6)=4$	$(2,7)=4$
$\|3\|$	$(3,0)=1$	$(3,1)=8$	$(3,2)=4$		$(3,4)=2$	$(3,5)=8$	$(3,6)=4$	$(3,7)=8$
$\|4\|$	$(4,0)=1$	$(4,1)=2$	$(4,2)=2$	$(4,3)=2$		$(4,5)=2$	$(4,6)=2$	$(4,7)=2$
$\|5\|$	$(5,0)=1$	$(5,1)=8$	$(5,2)=4$	$(5,3)=8$	$(5,4)=2$		$(5,6)=4$	$(5,7)=8$
$\|6\|$	$(6,0)=1$	$(6,1)=4$	$(6,2)=4$	$(6,3)=4$	$(6,4)=2$	$(6,5)=4$		$(6,7)=4$
$\|7\|$	$(7,0)=1$	$(7,1)=8$	$(7,2)=4$	$(7,3)=8$	$(7,4)=2$	$(7,5)=8$	$(7,6)=4$	

Dari Tabel 1.1 didapat graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_8}$ sebagai berikut



Gambar 1.1: Graf koprima prima $\mathbb{Z}_8$

Indeks harmonik merupakan rata-rata harmonik dari derajat dua simpul berbeda, u dan v, yang saling bertetangga. Indeks Harmonik dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$, dinotasikan $H(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$,

Definisi 1.1. [9] Misal $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf koprima prima di mana $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat, maka indeks Harmonik didefinisikan sebagai berikut

$$H\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = \sum_{uv \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \frac{2}{\deg(u) + \deg(v)}$$

Indeks Harmonik untuk graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_8}$ (lihat Gambar 1.1) adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
H\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_8}\right) = & \frac{2}{\deg(0)+\deg(1)} + \frac{2}{\deg(0)+\deg(2)} + \frac{2}{\deg(0)+\deg(3)} + \frac{2}{\deg(0)+\deg(4)} \\
& + \frac{2}{\deg(0)+\deg(5)} + \frac{2}{\deg(0)+\deg(6)} + \frac{2}{\deg(0)+\deg(7)} + \frac{2}{\deg(1)+\deg(4)} \\
& + \frac{2}{\deg(2)+\deg(4)} + \frac{2}{\deg(3)+\deg(4)} + \frac{2}{\deg(4)+\deg(5)} + \frac{2}{\deg(4)+\deg(6)} \\
& + \frac{2}{\deg(4)+\deg(7)} \\
= & \frac{2}{7+2} + \frac{2}{7+2} + \frac{2}{7+2} + \frac{2}{7+7} + \frac{2}{7+2} + \frac{2}{7+2} + \frac{2}{7+2} + \frac{2}{2+7} + \frac{2}{2+7} \\
& + \frac{2}{2+7} + \frac{2}{2+7} + \frac{2}{2+7} + \frac{2}{2+7} \\
= & 12 \cdot \frac{2}{9} + 1 \cdot \frac{2}{14} \\
= & \frac{59}{21}
\end{aligned}$$

Jadi, nilai indeks Harmonik untuk graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_8}$ $\frac{59}{21}$.

Indeks Randic adalah jumlahan dari 1 per akar dari perkalian dua simpul berbeda yang bertetangga. Indeks Randic pada graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ yang dinotasikan $R\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right)$ didefinisikan sebagai berikut

Definisi 1.2. [10] Misal $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf koprima prima di mana $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat, maka indeks Randic didefinisikan sebagai berikut

$$R\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = \sum_{uv \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}}$$

Nilai indeks Randic dari $\Gamma_{\mathbb{Z}_8}$ adalah $\frac{1}{7} + \frac{12}{\sqrt{14}}$. Perhitungan nilai indeks sebagai berikut

$$\begin{aligned}
R\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_8}\right) = & \frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(1)}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(2)}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(3)}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(4)}} \\
& + \frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(5)}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(6)}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(7)}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(1)\deg(4)}} \\
& + \frac{1}{\sqrt{\deg(2)\deg(4)}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(3)\deg(4)}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(4)\deg(5)}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(4)\deg(6)}} \\
& + \frac{1}{\sqrt{\deg(4)\deg(7)}} \\
= & \frac{1}{\sqrt{7\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{7\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{7\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{7\cdot 7}} + \frac{1}{\sqrt{7\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{7\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{7\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 7}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 7}} \\
& + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 7}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 7}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 7}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 7}} \\
= & 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + 1 \cdot \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

Indeks Gutman merupakan jumlahan dari perkalian derajat dua simpul berbeda beserta jarak dua simpul tersebut. Indeks Gutman pada pada graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ yang dinotasikan $Gut\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right)$ didefinisikan sebagai berikut

Definisi 1.3. [11] Misal $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf koprima prima di mana $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat, maka indeks Gutman didefinisikan sebagai berikut

$$Gut\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = \sum_{u,v \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \deg(u)\deg(v) d(u,v)$$

Nilai indeks Gutman dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_8}$ adalah 337. Perhatikan,

$$\begin{aligned}
Gut\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_8}\right) &= \deg(0)\deg(1)d(0,1) + \deg(0)\deg(2)d(0,2) + \deg(0)\deg(3)d(0,3) + \deg(0)\deg(4)d(0,4) \\
&\quad + \deg(0)\deg(5)d(0,5) + \deg(0)\deg(6)d(0,6) + \deg(0)\deg(7)d(0,7) + \deg(1)\deg(2)d(1,2) \\
&\quad + \deg(1)\deg(3)d(1,3) + \deg(1)\deg(4)d(1,4) + \deg(1)\deg(5)d(1,5) + \deg(1)\deg(6)d(1,6) \\
&\quad + \deg(1)\deg(7)d(1,7) + \deg(2)\deg(3)d(2,3) + \deg(2)\deg(4)d(2,4) + \deg(2)\deg(5)d(2,5) \\
&\quad + \deg(2)\deg(6)d(2,6) + \deg(2)\deg(7)d(2,7) + \deg(3)\deg(4)d(3,4) + \deg(3)\deg(5)d(3,5) \\
&\quad + \deg(3)\deg(6)d(3,6) + \deg(3)\deg(7)d(3,7) + \deg(4)\deg(5)d(4,5) + \deg(4)\deg(6)d(4,6) \\
&\quad + \deg(4)\deg(7)d(4,7) + \deg(5)\deg(6)d(5,6) + \deg(5)\deg(7)d(5,7) + \deg(6)\deg(7)d(6,7) \\
&= 7\cdot 2\cdot 1 + 7\cdot 2\cdot 1 + 7\cdot 2\cdot 1 + 7\cdot 7\cdot 1 + 7\cdot 2\cdot 1 + 7\cdot 2\cdot 1 + 7\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 2 \\
&\quad + 2\cdot 7\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 7\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 2 \\
&\quad + 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 7\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 2 + 7\cdot 2\cdot 1 + 7\cdot 2\cdot 1 + 7\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 2 \\
&\quad + 2\cdot 2\cdot 2 \\
&= 337
\end{aligned}$$

Subgraf dari graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ untuk $n = p^k$ adalah graf lengkap dan bipartit. Hal ini dijelaskan pada teorema berikut

Teorema 1.1. [12] *Misal diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf koprima prima dari grup $\mathbb{Z}_n$. Jika $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat, maka subgraf dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah graf lengkap K_p dan bipartit K_{p,p^k-p}.*

Graf lengkap yang terbentuk pada Teorema 1.1 terdiri dari himpunan simpul $\{0, p^{k-1}, 2p^{k-1}, 3p^{k-1}, \ldots, (p-1)p^{k-1}\}$. Lebih jauh, derajat simpul dari graf tersebut ada dua jenis, yaitu berderajat $p^k - 1$ dan p. Derajat simpul graf ini dijelaskan pada teorema berikut

Teorema 1.2. [12] *Misal diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf koprima prima dari grup $\mathbb{Z}_n$. Jika $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat, maka derajat simpul dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ terdiri dari dua, yaitu*

$$\deg(v) = \begin{cases} p^k - 1 & , v \in V_1 \\ p & , v \in V_2 \end{cases}$$

dengan

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{0, p^{k-1}, 2p^{k-1}, 3p^{k-1}, \ldots, (p-1)p^{k-1}\} \\
V_2 &= \{0, 1, 2, 3, \ldots, p^k - 1\} \backslash V_1
\end{aligned}$$

2. Hasil dan Pembahasan

Rumus umum untuk indeks Harmonik dapat dilihat pada teorema di bawah ini

Teorema 2.1. *Misal diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf koprima prima dari grup $\mathbb{Z}_n$. Jika $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat, maka indeks Harmonik dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah*

$$H\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = \frac{p^2 - p}{2\left(p^k - 1\right)} + \frac{2\left(p^{k+1} - p^2\right)}{p^k + p - 1}$$

Bukti. Himpunan simpul pada graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ akan dipartisi menjadi dua himpunan, yaitu

$$V_1 = \{0, p^{k-1}, 2p^{k-1}, 3p^{k-1}, \ldots, (p-1)p^{k-1}\}$$
$$V_2 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, p^k - 1\} \backslash V_1$$

Dalam pembuktian ini akan memanfaatkan deret aritmatika. Lebih jauh, notasi S_p diartikan sebagai jumlah p suku pertama barisan aritmetika. Sama halnya dengan S_{p-1} yang dimaksudkan untuk jumlahan $p-1$ suku pertama. Perhatikan,

1) Sisi yang menghubungkan dua simpul berbeda di V_1, yaitu u_1 dan v_1 dengan $u_1 \neq v_1$. Berdasarkan Teorema 1.2, diperoleh bahwa $\deg(u_1) = \deg(v_1) = p^k - 1$. Selanjutnya karena graf dari himpunan verteks V_1 membentuk graf lengkap berdasarkan Teorema 1.1, maka jumlah edge dari graf tersebut adalah S_{p-1}. Oleh karena itu, didapat

$$\begin{aligned} \sum_{u_1 v_1 \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \frac{2}{\deg(u_1) + \deg(v_1)} &= S_{p-1} \cdot \frac{2}{(p^k - 1) + (p^k - 1)} \\ &= \frac{1}{2}(p-1)\,p \cdot \frac{1}{p^k - 1} \\ &= \frac{p^2 - p}{2\left(p^k - 1\right)} \end{aligned}$$

2) Sisi yang menghubungkan V_1 ke V_2. Misal $u_1 \in V_1$ dan $v_2 \in V_2$, maka berdasarkan Teorema 1.2 didapat $\deg(u_1) = p^k - 1$ dan $\deg(v_2) = p$. Selanjutnya sisi yang menghubungkan V_1 dan V_2 sejumlah $\left(p^{k-1} - 1\right) S_p$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{u_1 v_2 \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \frac{2}{\deg(u_1) + \deg(v_2)} &= \left(p^{k-1} - 1\right) S_p \cdot \frac{2}{(p^k - 1) + p} \\ &= \frac{1}{2}\left(p^{k-1} - 1\right)(p^2 + p) \cdot \frac{2}{p^k + p - 1} \\ &= \frac{p^{k+1} + p^k - p^2 - p}{p^k + p - 1} \end{aligned}$$

3) Sisi yang menghubungkan V_2 ke V_1. Misal $u_2 \in V_2$ dan $v_1 \in V_1$, maka berdasarkan Teorema 1.2 didapat $\deg(u_2) = p$ dan $\deg(v_1) = p^k - 1$. Selanjutnya sisi yang menghubungkan V_2 dan V_1 sejumlah $\left(p^{k-1} - 1\right) S_{p-1}$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{u_2 v_1 \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \frac{2}{\deg(u_2) + \deg(v_1)} &= \left(p^{k-1} - 1\right) S_{p-1} \cdot \frac{2}{p + (p^k - 1)} \\ &= \frac{1}{2}\left(p^{k-1} - 1\right)(p^2 - p) \cdot \frac{2}{p^k + p - 1} \\ &= \frac{p^{k+1} - p^k - p^2 + p}{p^k + p - 1} \end{aligned}$$

Selanjutnya didapat

$$
\begin{aligned}
H\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) &= \sum_{u_1v_1 \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \frac{2}{\deg\left(u_1\right)+\deg\left(v_1\right)} + \sum_{u_1v_2 \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \frac{2}{\deg\left(u_1\right)+\deg\left(v_2\right)} + \sum_{u_2v_1 \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \frac{2}{\deg\left(u_2\right)+\deg\left(v_1\right)} \\
&= \frac{p^2-p}{2\left(p^k-1\right)} + \frac{p^{k+1}+p^k-p^2-p}{p^k+p-1} + \frac{p^{k+1}-p^k-p^2+p}{p^k+p-1} \\
&= \frac{p^2-p}{2\left(p^k-1\right)} + \frac{2\left(p^{k+1}-p^2\right)}{p^k+p-1}
\end{aligned}
$$

Jadi, indeks Harmonik dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah $H\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = \dfrac{p^2-p}{2\left(p^k-1\right)} + \dfrac{2\left(p^{k+1}-p^2\right)}{p^k+p-1}$ □

Selanjutnya rumus umum untuk indeks Randic tertuang pada teorema di bawah ini

Teorema 2.2. *Misal diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf koprima prima dari grup $\mathbb{Z}_n$. Jika $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat, maka indeks Randic dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah*

$$
R\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = \frac{p^2-p}{2\left(p^k-1\right)} + \frac{p^{k+1}-p^2}{\sqrt{\left(p^k-1\right)p}}
$$

Bukti. Dengan menggunakan asumsi yang sama pada Teorema 2.1, maka diperoleh

1. Untuk $u_1, v_1 \in V_1$, dengan $u_1 \neq v_1$

$$
\begin{aligned}
\sum_{u_1v_1 \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \frac{1}{\sqrt{\deg\left(u_1\right)\deg\left(v_1\right)}} &= S_{p-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(p^k-1\right)\left(p^k-1\right)}} \\
&= \frac{1}{2}(p-1)p \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(p^k-1\right)^2}} \\
&= \frac{p^2-p}{2\left(p^k-1\right)}
\end{aligned}
$$

2. Untuk sisi yang menghubungkan V_1 ke V_2 dengan $u_1 \in V_1$ dan $v_2 \in V_2$

$$
\begin{aligned}
\sum_{u_1v_2 \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \frac{1}{\sqrt{\deg\left(u_1\right)\deg\left(v_2\right)}} &= \left(p^{k-1}-1\right) S_p \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(p^k-1\right)p}} \\
&= \frac{1}{2}\left(p^{k-1}-1\right)\left(p^2+p\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(p^k-1\right)p}} \\
&= \frac{p^{k+1}+p^k-p^2-p}{2\sqrt{\left(p^k-1\right)p}}
\end{aligned}
$$

3. Untuk sisi yang menghubungkan V_2 ke V_1 dengan $u_2 \in V_2$ dan $v_1 \in V_1$s

$$
\begin{aligned}
\sum_{u_2v_1 \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \frac{1}{\sqrt{\deg\left(u_2\right)\deg\left(v_1\right)}} &= \left(p^{k-1}-1\right) S_{p-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{p\left(p^k-1\right)}} \\
&= \frac{1}{2}\left(p^{k-1}-1\right)\left(p^2-p\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(p^k-1\right)p}} \\
&= \frac{p^{k+1}-p^k-p^2+p}{2\sqrt{\left(p^k-1\right)p}}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya diperoleh

$$
\begin{aligned}
R\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) &= \sum_{u_1v_1\in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \frac{1}{\sqrt{\deg\left(u_1\right)\deg\left(v_1\right)}} + \sum_{u_1v_2\in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \frac{1}{\sqrt{\deg\left(u_1\right)\deg\left(v_2\right)}} + \sum_{u_2v_1\in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \frac{1}{\sqrt{\deg\left(u_2\right)\deg\left(v_1\right)}} \\
&= \frac{p^2-p}{2\left(p^k-1\right)} + \frac{p^{k+1}+p^k-p^2-p}{2\sqrt{\left(p^k-1\right)p}} + \frac{p^{k+1}-p^k-p^2+p}{2\sqrt{\left(p^k-1\right)p}} \\
&= \frac{p^2-p}{2\left(p^k-1\right)} + \frac{p^{k+1}-p^2}{\sqrt{\left(p^k-1\right)p}}
\end{aligned}
$$

□

Teorema 2.3. *Misal diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf koprima prima dari grup $\mathbb{Z}_n$. Jika $n = p^k$ dengan p prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat, maka indeks Gutman dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah*

$$
Gut\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = \frac{1}{2}\left(5p^{2k+2} - 6p^{k+2} + p^2 - p^{2k+1} + 2p^{k+1} - p - 6p^{k+3} + 2p^4 + 4p^3\right)
$$

Bukti. Dengan asumsi yang sama pada Teorema 2.1, maka diperoleh

a) Untuk $u_1, v_1 \in V_1$, dengan $u_1 \neq v_1$. Karena graf yang terbentuk untuk simpul V_1 adalah graf lengkap, maka jarak dua simpulnya sama dengan 1. Oleh karena itu, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\sum_{u_1,v_1\in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \deg\left(u_1\right)\deg\left(v_1\right)d(u_1,v_1) &= S_{p-1}\left(p^k-1\right)\left(p^k-1\right)\cdot 1 \\
&= \frac{1}{2}(p-1)p\left(p^k-1\right)^2 \\
&= p^{k+1} - p^{k+2} - \frac{1}{2}p^{2k+1} + \frac{1}{2}p^{2k+2} + \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p
\end{aligned}
$$

b) Jarak simpul V_1 ke V_2, yaitu $u_1 \in V_1$ dan $v_2 \in V_2$ sama dengan 1, $d(u_1, v_2) = 1$. Oleh karena itu, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\sum_{u_1,v_2\in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \deg\left(u_1\right)\deg\left(v_2\right)d(u_1,v_2) &= \left(p^{k-1}-1\right)S_p\left(p^k-1\right)p\cdot 1 \\
&= \frac{1}{2}\left(p^{k-1}-1\right)(p+1)p\left(p^k-1\right)p \\
&= -\frac{1}{2}p^{k+1} - \frac{1}{2}p^{k+3} + \frac{1}{2}p^{2k+1} + \frac{1}{2}p^{2k+2} - p^{k+2} + \frac{1}{2}p^3 + \frac{1}{2}p^2
\end{aligned}
$$

c) Jarak simpul V_2 ke V_1, yaitu $u_2 \in V_2$ dan $v_1 \in V_1$ sama dengan 1, $d(u_2, v_1) = 1$. Oleh karena itu, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\sum_{u_2,v_1\in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \deg\left(u_2\right)\deg\left(v_1\right)d(u_2,v_1) &= \left(p^{k-1}-1\right)S_{p-1}\cdot p\left(p^k-1\right)\cdot 1 \\
&= \left(p^{k-1}-1\right)\left(\frac{1}{2}(p-1)p\right)p\left(p^k-1\right) \\
&= \frac{1}{2}p^{k+1} - \frac{1}{2}p^{k+3} - \frac{1}{2}p^{2k+1} + \frac{1}{2}p^{2k+2} + \frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{2}p^2
\end{aligned}
$$

d) Jarak dua simpul berbeda di $V_2, u_2 \neq v_2 \in V_2$, adalah $d(u_2, v_2) = 2$. Selanjutnya berdasarkan Teorema 1.2 diperoleh $\deg\left(u_2\right) = \deg\left(v_2\right) = p$. Lebih jauh, banyaknya lintasan terpendek yang terbentuk, yaitu (u_2, v_2), sejumlah S_{p^k-p-1}. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{u_2,v_2\in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \deg(u_2)\deg(v_2)d(u_2,v_2) &= S_{p^k-p-1}\cdot p\cdot p\cdot 2\\ &= \frac{1}{2}\left(p^k-p-1\right)\left(p^k-p\right)p^2\cdot 2\\ &= -p^{k+2}-2p^{k+3}+p^{2k+2}+p^4+p^3\end{aligned}$$

Dari a), b), c), dan d) didapat

$$\begin{aligned}Gut\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = &\sum_{\{u_1,v_1\}\in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \deg(u_1)\deg(v_1)d(u_1,v_1) + \sum_{\{u_1,v_2\}\in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \deg(u_1)\deg(v_2)d(u_1,v_2)\\ &\sum_{\{u_2,v_1\}\in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \deg(u_2)\deg(v_1)d(u_2,v_1) + \sum_{\{u_2,v_2\}\in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \deg(u_2)\deg(v_2)d(u_2,v_2)\\ = &\left(p^{k+1}-p^{k+2}-\frac{1}{2}p^{2k+1}+\frac{1}{2}p^{2k+2}+\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}p\right)+\left(-\frac{1}{2}p^{k+1}-\frac{1}{2}p^{k+3}+\frac{1}{2}p^{2k+1}\right.\\ &\left.+\frac{1}{2}p^{2k+2}-p^{k+2}+\frac{1}{2}p^3+\frac{1}{2}p^2\right)+\left(\frac{1}{2}p^{k+1}-\frac{1}{2}p^{k+3}-\frac{1}{2}p^{2k+1}+\frac{1}{2}p^{2k+2}+\frac{1}{2}p^3-\frac{1}{2}p^2\right)\\ &+\left(-p^{k+2}-2p^{k+3}+p^{2k+2}+p^4+p^3\right)\\ = &\,p^4+2p^3+\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}p^{2k+1}+\frac{5}{2}p^{2k+2}+p^{k+1}-3p^{k+3}-3p^{k+2}\\ Gut\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = &\,\frac{1}{2}\left(5p^{2k+2}-6p^{k+2}+p^2-p^{2k+1}+2p^{k+1}-p-6p^{k+3}+2p^4+4p^3\right)\end{aligned}$$

□

3. Kesimpulan

Dari penjelasan di atas diperoleh nilai dari indeks Harmoni, Randic, dan Gutman untuk graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ dengan $n = p^k$ untuk bilangan prima p dan bilangan bulat $k \geq 2$, yaitu

1. Indeks Harmonik
$$H\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = \frac{p^2-p}{2\left(p^k-1\right)} + \frac{2\left(p^{k+1}-p^2\right)}{p^k+p-1}$$
2. Indeks Randic
$$R\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = \frac{p^2-p}{2\left(p^k-1\right)} + \frac{p^{k+1}-p^2}{\sqrt{\left(p^k-1\right)p}}$$
3. Indeks Gutman
$$Gut\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = \frac{1}{2}\left(5p^{2k+2}-6p^{k+2}+p^2-p^{2k+1}+2p^{k+1}-p-6p^{k+3}+2p^4+4p^3\right)$$

Referensi

[1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2008. View online.

[2] S. Wagner and H. Wang, *Introduction to chemical graph theory*. Chapman and Hall/CRC, 2018. View online.

[3] M. N. Husni, H. Syafitri, A. M. Siboro, A. G. Syarifudin, Q. Aini, and I. G. A. W. Wardhana, "The harmonic index and the gutman index of coprime graph of integer group modulo with order of prime power," *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 16, no. 3, pp. 961–966, 2022. View online.

[4] M. R. Gayatri, R. Fadhilah, S. T. Lestari, L. F. Pratiwi, A. Abdurahim, and I. G. A. W. Wardhana, "Topology index of the coprime graph for dihedral group of prime power order," *Jurnal Diferensial*, vol. 5, no. 2, pp. 126–134, 2023. View online.

[5] L. R. W. Putra, Z. Y. Awanis, S. Salwa, Q. Aini, and I. G. A. W. Wardhana, "The power graph representation for integer modulo group with power prime order," *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 17, no. 3, pp. 1393–1400, 2023. View online.

[6] L. Afifah, *Indeks harmonik dan indeks Gutman graf nilradikal pada gelanggang komutatif dengan satuan*. PhD thesis, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, 2021. View online.

[7] E. Y. Asmarani, S. T. Lestari, D. Purnamasari, A. G. Syarifudin, S. Salwa, and I. G. A. W. Wardhana, "The first zagreb index, the wiener index, and the gutman index of the power of dihedral group," *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, vol. 7, no. 4, pp. 513–520, 2023. View online.

[8] A. Adhikari and S. Banerjee, "Prime coprime graph of a finite group," *Novi Sad J. Math*, vol. 52, p. 11151, 2021. View online.

[9] L. Zhong, "The harmonic index for graphs," *Applied mathematics letters*, vol. 25, no. 3, pp. 561–566, 2012. View online.

[10] C. Dalfó, "On the randić index of graphs," *Discrete Mathematics*, vol. 342, no. 10, pp. 2792–2796, 2019. View online.

[11] M. Javaid, M. K. Siddique, and E. Bonyah, "Computing gutman connection index of thorn graphs," *Journal of Mathematics*, vol. 2021, no. 1, p. 2289514, 2021. View online.

[12] A. Abdurahim, L. F. Pratiwi, G. Y. Karang, W. I. G. A. W, I. Irwansyah, Z. Y. Awanis, and M. U. Romdhini, "Indeks wiener pada graf koprima prima dari grup bilangan bulat modulo," *Jurnal Matematika UNAND*, p. in review, 2024.

Format Sitasi IEEE:
Abdurahim, dkk. *"Indeks Harmonik, Randic, dan Gutman dari Graf Koprima Prima untuk Grup Bilangan Bulat Modulo"*, *Jurnal Diferensial*, vol. 7(1), pp. 38-46,2025.