

ARTIKEL PENELITIAN

Dimensi Metrik Lokal pada Operasi Korona Graf Ular Segitiga dengan Graf Lintasan Orde Dua

Jaqueline Widad Zuha^{1,*}, Deddy Rahmadi¹, Arif Munandar¹

¹Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga, Yogyakarta, Indonesia

*Penulis korespondensi: 22106010057@student.uin-suka.ac.id

Diterima: 30 Januari 2026; Direvisi: 26 Februari 2026; Disetujui: 25 Maret 2026; Dipublikasi: 1 April 2026.

Abstrak: Graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonard Euler melalui permasalahan Jembatan Königsberg pada tahun 1736. Misalkan G adalah graf terhubung dengan himpunan verteks $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Konsep jarak pada graf melahirkan pengertian dimensi metrik dan dimensi metrik lokal. Misalkan $W \subset V(G)$ dengan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Representasi suatu verteks $x \in V(G)$ terhadap W didefinisikan sebagai $r(x | W) = (d(x, w_1), d(x, w_2), \dots, d(x, w_n))$. Himpunan W disebut sebagai himpunan pembeda lokal dari graf G jika untuk setiap pasangan verteks yang saling bertetangga $x, y \in V(G)$ berlaku $r(x | W) \neq r(y | W)$. Kardinalitas minimum dari himpunan tersebut disebut sebagai dimensi metrik lokal graf G dan dilambangkan dengan $\dim_\ell(G)$. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan dimensi metrik dan dimensi metrik lokal pada graf ular segitiga T_n , serta pada graf-graf yang diperoleh dari operasi korona antara T_n dan graf lintasan berorde dua. Metode yang digunakan adalah studi literatur dengan analisis struktur graf dan jarak antarverteks. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dimensi metrik dan dimensi metrik lokal graf ular segitiga bernilai 2. Selain itu, dimensi metrik lokal graf $T_n \odot P_2$ adalah $2n + 1$, sedangkan dimensi metrik lokal graf $P_2 \odot T_n$ bernilai $n + 3$ untuk n ganjil dan $n + 2$ untuk n genap.

Kata Kunci: Dimensi Metrik, Graf Ular Segitiga, Dimensi Metrik Lokal, Operasi Korona

Abstract: Graphs were first introduced by Leonard Euler through the Königsberg Bridge problem in 1736. Let G be a connected graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. The concept of distance in graphs leads to the notions of metric dimension and local metric dimension. Let $W \subset V(G)$ with $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. The representation of a vertex $x \in V(G)$ with respect to W is defined by $r(x | W) = (d(x, w_1), d(x, w_2), \dots, d(x, w_n))$. The set W is called a local resolving set of G if for every pair of adjacent vertices $u, v \in V(G)$, $r(u | W) \neq r(v | W)$. The minimum cardinality of such a set is called the local metric dimension of G and is denoted by $\dim_\ell(G)$. This research aims to determine the metric dimension and local metric dimension of the triangular snake graph T_n , as well as graphs obtained from the corona operation between T_n and a path graph of order two. The method used is a literature study with an analysis of graph structure and vertex distances. The results show that both the metric dimension and the local metric dimension of the triangular snake graph are equal to 2. Moreover, the local metric dimension of $T_n \odot P_2$ is $2n + 1$, while that of $P_2 \odot T_n$ is $n + 3$ for odd n and $n + 2$ for even n .

Keywords: Corona Operation, Local Metric Dimension, Metric Dimension, Triangular Snake Graph

1. Pendahuluan

Konsep dimensi metrik pada teori graf diperkenalkan pertama kali oleh Harary dan Malter pada tahun 1976. Harary mendefinisikan dimensi metrik melalui himpunan pembeda [1]. Misalkan graf G terhubung dengan masing-masing himpunan verteks dan *edge* adalah $V(G)$, $E(G)$. Diberikan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ himpunan bagian dari $V(G)$. Representasi setiap $x \in V(G)$ terhadap W didefinisikan sebagai $r(x|W) = (d(x, w_1), d(x, w_2), \dots, d(x, w_n))$. Jika setiap pasangan verteks berbeda $u, v \in V(G)$ berlaku $r(u|W) \neq r(v|W)$, maka W disebut himpunan pembeda graf G . Kardinalitas minimum W disebut dimensi metrik dari graf G dan dinotasikan $dim(G)$. Lebih lanjut, W dinyatakan sebagai basis metrik dari G [2]. Beberapa penelitian yang membahas tentang dimensi metrik diantaranya [3], [4], [5], [6] dan [7]. Salah satu dimensi metrik mempunyai beberapa karakteristik yaitu, $dim(G) = 1 \Leftrightarrow G \cong P_n$.

Teorema 1.1. [2] Diberikan graf terhubung G dengan n verteks, maka $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G \cong P_n$.

Dimensi metrik lokal adalah pengembangan dari dimensi metrik yang merupakan perluasan dari himpunan pembeda menjadi pembeda lokal. Topik dimensi metrik lokal diperkenalkan pertama kali pada tahun 2010 oleh Okamoto [8]. Pada pendekatan ini, W disebut sebagai himpunan pembeda lokal graf G jika setiap pasangan verteks bertetangga $x, y \in V(G)$ dengan $x \neq y$ berlaku $r(x|W) \neq r(y|W)$. Lebih lanjut, kardinalitas minimum dari himpunan pembeda lokal W disebut dimensi metrik lokal dan biasa ditulis $dim_\ell(G)$ serta W disebut basis metrik lokal dari G . Dimensi metrik lokal telah diaplikasikan pada beberapa graf seperti graf split dan unisiklik [9], graf musical dan stacked prism [10], operasi korona [11], serta operasi amalgamasi [12]. Okamoto membuktikan bahwa graf G mempunyai nilai 1 jika G adalah graf bipartit.

Teorema 1.2. [8] Diberikan graf terhubung G dengan n verteks, maka $dim_\ell(G) = 1$ jika dan hanya jika G merupakan graf bipartit.

Salah satu operasi pada graf adalah operasi korona yang pertama kali dikenalkan oleh [13]. Dimensi Metrik lokal lebih lanjut dikaji pada graf hasil operasi korona, yang kemudian dikembangkan oleh Rodríguez-Velázquez [14]. Graf hasil operasi korona G_1 dan G_2 , dilambangkan $G_1 \odot G_2$ adalah graf yang dibentuk dari satu salinan G_1 dan salinan G_2 sebanyak orde G_1 , dengan setiap verteks ke- i pada G_1 dihubungkan ke seluruh verteks pada salinan ke- i dari G_2 [15].

Graf ular segitiga T_n adalah graf yang mempunyai hubungan antara graf lintasan dengan graf siklus orde 3 [16]. Penelitian tentang graf T_n telah dikaji oleh peneliti seperti [17], [18] dan [19]. Agasthi mendefinisikan bahwa, graf T_n merupakan graf yang diperoleh dari suatu graf lintasan $P_n = u_1, \dots, u_n$ dengan cara menggabungkan setiap pasangan verteks berurutan u_i dan u_{i+1} dengan satu verteks baru v_i , untuk setiap $1 \leq i \leq n$. Setiap *edge* pada graf lintasan diganti dengan graf C_3 , sehingga graf ular segitiga dapat dipandang sebagai hasil penambahan satu verteks pada setiap *edge* lintasan yang membentuk rangkaian subgraf C_3 menyerupai bentuk ular. Masing-masing himpunan verteks dan himpunan *edge* pada graf ular segitiga didefinisikan sebagai berikut.

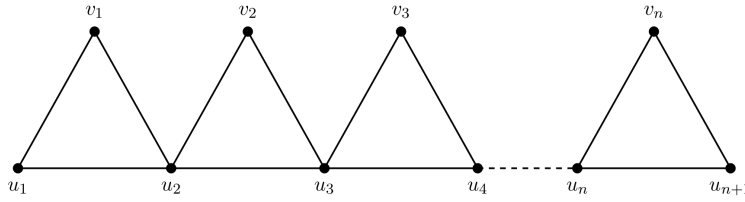
$$V(T_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\},$$

$$E(T_n) = \{u_i u_{i+1}, u_i v_i, u_{i+1} v_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Dengan demikian, didapat bahwa, $|V(T_n)| = 2n + 1$, $|E(T_n)| = 3n$.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur yang dipadukan dengan analisis teoretis terhadap struktur graf yang dikaji. Tahap awal dilakukan dengan menelaah konsep dimensi metrik



Gambar 1.1: Graf T_n

dan dimensi metrik lokal beserta hasil-hasil penelitian terdahulu yang relevan sebagai latar belakang penulisan. Selanjutnya, dilakukan karakterisasi struktur graf ular segitiga T_n serta graf hasil operasi korona $T_n \odot P_2$ dan $P_2 \odot T_n$, meliputi penentuan himpunan verteks dan himpunan sisi masing-masing graf. Berdasarkan karakterisasi tersebut, ditentukan kandidat himpunan pembeda lokal pada setiap graf yang dikaji dengan melihat representasi setiap verteks terhadap himpunan tersebut guna memverifikasi bahwa setiap pasangan verteks bertetangga memiliki representasi yang berbeda. Selanjutnya, pembuktian himpunan pembeda lokal dengan kardinalitas minimum dilakukan menggunakan metode kontradiksi, yaitu dengan mengasumsikan keberadaan himpunan pembeda lokal dengan kardinalitas lebih kecil dan menunjukkan adanya pasangan verteks bertetangga yang memiliki representasi sama. Melalui tahapan tersebut diperoleh nilai dimensi metrik dan dimensi metrik lokal pada graf yang diteliti.

3. Pembahasan

Berikut diberikan sifat yang menyatakan bahwa graf ular segitiga dengan orde $2n + 1$ memiliki dimensi 2.

Teorema 3.1. *Jika T_n adalah graf ular segitiga dengan orde $h = 2n + 1$, maka $\dim(T_n) = 2$.*

Bukti. Diberikan T_n graf ular segitiga dengan orde $h = 2n + 1$. Misalkan $V(T_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Dipilih himpunan $W = \{u_1, u_{n+1}\}$. Representasi setiap verteks di graf T_n terhadap himpunan W diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned} r(u_1|W) &= (d(u_1, u_1), d(u_1, u_{n+1})) = (0, n); \\ r(u_2|W) &= (d(u_2, u_1), d(u_2, u_{n+1})) = (1, n - 1); \\ &\vdots \\ r(u_n|W) &= (d(u_n, u_1), d(u_n, u_{n+1})) = (n - 1, 1); \\ r(u_{n+1}|W) &= (d(u_{n+1}, u_1), d(u_{n+1}, u_{n+1})) = (n, 0); \\ r(v_1|W) &= (d(v_1, u_1), d(v_1, u_{n+1})) = (1, n); \\ r(v_2|W) &= (d(v_2, u_1), d(v_2, u_{n+1})) = (2, n - 1); \\ &\vdots \\ r(v_n|W) &= (d(v_n, u_1), d(v_n, u_{n+1})) = (n, 1). \end{aligned}$$

Oleh karena $\forall x, y \in V(T_n)$ dan $x \neq y$ diperoleh $r(x|W) \neq r(y|W)$, maka himpunan W pembeda dari graf T_n . Oleh karena T_n graf ular segitiga dan berdasarkan Teorema 1.1, maka $\dim(T_n) \neq 1$. Dengan demikian, W himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum 2. Maka $\dim(T_n) = 2$. \square

Teorema 3.2. Jika T_n adalah graf ular segitiga dengan orde $h = 2n + 1$, maka $\dim_\ell(T_n) = 2$.

Bukti. Diberikan T_n graf ular segitiga orde $h = 2n + 1$. Misalkan $V(T_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Dipilih $W = \{u_1, u_{n+1}\}$. Representasi setiap verteks $x \in V(T_n)$ terhadap W adalah

$$r(u_1|W) = (d(u_1, u_1), d(u_1, u_{n+1})) = (0, n);$$

$$r(u_2|W) = (d(u_2, u_1), d(u_2, u_{n+1})) = (1, n - 1);$$

⋮

$$r(u_n|W) = (d(u_n, u_1), d(u_n, u_{n+1})) = (n - 1, 1);$$

$$r(u_{n+1}|W) = (d(u_{n+1}, u_1), d(u_{n+1}, u_{n+1})) = (n, 0);$$

$$r(v_1|W) = (d(v_1, u_1), d(v_1, u_{n+1})) = (1, n);$$

$$r(v_2|W) = (d(v_2, u_1), d(v_2, u_{n+1})) = (2, n - 1);$$

⋮

$$r(v_n|W) = (d(v_n, u_1), d(v_n, u_{n+1})) = (n, 1).$$

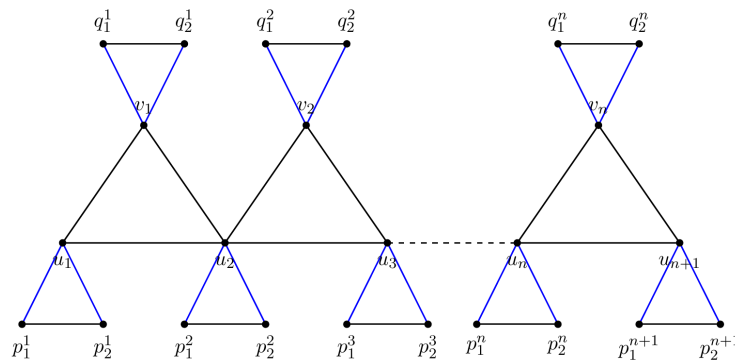
Oleh karena $\forall x, y \in V(T_n)$ bertetangga dan $x \neq y$ diperoleh $r(x|W) \neq r(y|W)$, jadi himpunan W adalah pembeda lokal dari graf T_n . Dikarenakan T_n graf ular segitiga, berdasarkan Teorema 1.2, maka $\dim_\ell(T_n) \neq 1$. Dengan demikian, W himpunan pembeda lokal dengan kardinalitas minimum 2. Sehingga, $\dim_\ell(T_n) = 2$. □

Graf $T_n \odot P_2$ dibentuk dengan mengambil sebuah graf T_n dan salinan H_1, H_2, \dots, H_i dari graf P_2 , untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, h\}$. Kemudian menghubungkan semua verteks hasil salinan H_i dengan masing-masing verteks pada T_n . Didefinisikan himpunan verteks dan sisi pada graf $T_n \odot P_2$ adalah.

$$V(T_n \odot P_2) = \{u_i; i \in [1, n + 1]\} \cup \{v_j; j \in [1, n]\} \cup \{p_m^i; m \in [1, 2], i \in [1, n + 1]\} \cup \{q_m^j; m \in [1, 2], j \in [1, n]\}$$

$$E(T_n \odot P_2) = \{u_i u_{i+1}; i \in [1, n]\} \cup \{p_m^i p_{m+1}^i; m \in [1, 2], i \in [1, n + 1]\} \cup \{q_m^j q_{m+1}^j; m \in [1, 2], j \in [1, n]\} \\ \cup \{u_i p_m^i; m \in [1, 2], i \in [1, n + 1]\} \cup \{v_j q_m^j; m \in [1, 2], j \in [1, n]\} \cup \{u_i v_j; i \in [1, n + 1], j \in [1, n]\}.$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa, $|V(T_n \odot P_2)| = 6n + 3$, $|E(T_n \odot P_2)| = 9n + 3$.



Gambar 3.2: Graf $T_n \odot P_2$

Selanjutnya, diperoleh teorema mengenai dimensi metrik lokal dari graf $T_n \odot P_2$.

Teorema 3.3. Jika T_n graf ular segitiga berorde $h = 2n+1$ dan P_2 graf lintasan, maka $\dim_{\ell}(T_n \odot P_2) = 2n+1$.

Bukti. Misalkan graf ular segitiga T_n berorde $h = 2n + 1$ dan graf lintasan P_2 . Diberikan $T_n \odot P_2$ dengan $V(T_n \odot P_2) = \{u_i; i \in [1, n+1]\} \cup \{v_j; j \in [1, n]\} \cup \{p_m^i; m \in [1, 2], i \in [1, n+1]\} \cup \{q_m^j; m \in [1, 2], j \in [1, n]\}$. Dipilih himpunan $W = \{p_1^1, p_1^2, \dots, p_1^{n+1}, q_1^1, q_1^2, \dots, q_1^n\}$, dengan $|W| = 2n + 1$. Representasi setiap verteks $x \in V(T_n \odot P_2)$ terhadap W adalah

$$\begin{aligned}
 r(u_1|W) &= (1, 2, 3, \dots, n+1, 2, 3, 4, \dots, n+1); \\
 r(u_2|W) &= (2, 1, 2, 3, \dots, n, 2, 2, 3, 4, \dots, n); \\
 &\vdots \\
 r(u_n|W) &= (n, n-1, n-1, \dots, 2, 1, 2, n, n-1, n-1, \dots, 3, 2, 2); \\
 r(u_{n+1}|W) &= (n+1, n, n-1, \dots, 3, 2, 1, n+1, n, n-1, \dots, 4, 3, 2) \\
 r(v_1|W) &= (2, 2, 3, 4, \dots, n+1, 1, 3, 4, 5, \dots, n+1); \\
 r(v_2|W) &= (3, 2, 2, 3, 4, 5, \dots, n, 3, 1, 3, 4, 5, \dots, n); \\
 &\vdots \\
 r(v_n|W) &= (n+1, n, n-1, \dots, 3, 2, 2, n+1, n, n-1, \dots, 4, 3, 1); \\
 r(p_1^1|W) &= (0, 3, 4, 5, \dots, n+2, 3, 4, 5, \dots, n+2); \\
 r(p_1^2|W) &= (3, 0, 3, 4, 5, \dots, n+1, 3, 3, 4, 5, \dots, n+1); \\
 &\vdots \\
 r(p_1^n|W) &= (n+1, n, n-1, \dots, 4, 3, 0, 3, n+1, n, n-1, \dots, 4, 3, 3); \\
 r(p_1^{n+1}|W) &= (n+2, n+1, n, \dots, 4, 3, 0, n+2, n+1, n, \dots, 5, 4, 3); \\
 r(p_2^1|W) &= (1, 3, 4, 5, \dots, n+2, 3, 4, 5, \dots, n+2); \\
 r(p_2^2|W) &= (3, 1, 3, 4, 5, \dots, n+1, 3, 3, 4, 5, \dots, n+1); \\
 &\vdots \\
 r(p_2^n|W) &= (n+1, n, n-1, \dots, 4, 3, 1, 3, n+1, n, n-1, \dots, 4, 3, 3); \\
 r(p_2^{n+1}|W) &= (n+2, n+1, n, \dots, 4, 3, 1, n+2, n+1, n, \dots, 5, 4, 3); \\
 r(q_1^1|W) &= (3, 3, 4, 5, \dots, n+2, 0, 4, 5, \dots, n+2); \\
 r(q_1^2|W) &= (4, 3, 3, 4, 5, \dots, n+1, 4, 0, 4, 5, \dots, n+1); \\
 &\vdots \\
 r(q_1^n|W) &= (n+2, n+1, n, \dots, 4, 3, 3, n+2, n+1, n, \dots, 5, 4, 0); \\
 r(q_2^1|W) &= (3, 3, 4, 5, \dots, n+2, 1, 4, 5, \dots, n+2); \\
 r(q_2^2|W) &= (4, 3, 3, 4, 5, \dots, n+1, 4, 1, 4, 5, \dots, n+1); \\
 &\vdots \\
 r(q_2^n|W) &= (n+2, n+1, n, \dots, 4, 3, 3, n+2, n+1, n, \dots, 5, 4, 1).
 \end{aligned}$$

Setiap verteks bertetangga $x, y \in V(T_n \odot P_2)$ dan $x \neq y$ diperoleh $r(x|W) \neq r(y|W)$, jadi himpunan W adalah pembeda lokal dari graf $T_n \odot P_2$. Selanjutnya, andaikan terdapat himpunan pembeda lokal $S = \{p_1^1, p_1^2, \dots, p_1^{n+1}, q_1^1, q_1^2, \dots, q_1^{n-1}\}$ dengan $|S| = 2n < 2n + 1$. Representasi setiap verteks $x \in V(T_n \odot P_2)$ terhadap himpunan S adalah

$$\begin{aligned}
r(u_1|S) &= (1, 2, 3, \dots, n+1, 2, 3, 4, \dots, n); \\
r(u_2|S) &= (2, 1, 2, 3, \dots, n, 2, 2, 3, 4, \dots, n-1); \\
&\vdots \\
r(u_n|S) &= (n, n-1, n-1, \dots, 2, 1, 2, n, n-1, n-1, \dots, 3, 2); \\
r(u_{n+1}|S) &= (n+1, n, n-1, \dots, 3, 2, 1, n+1, n, n-1, \dots, 4, 3) \\
r(v_1|S) &= (2, 2, 3, 4, \dots, n+1, 1, 3, 4, 5, \dots, n); \\
r(v_2|S) &= (3, 2, 2, 3, 4, 5, \dots, n, 3, 1, 3, 4, 5, \dots, n-1); \\
&\vdots \\
r(v_n|S) &= (n+1, n, n-1, \dots, 3, 2, 2, n+1, n, n-1, \dots, 4, 3); \\
r(p_1^1|S) &= (0, 3, 4, 5, \dots, n+2, 3, 4, 5, \dots, n+1); \\
r(p_1^2|S) &= (3, 0, 3, 4, 5, \dots, n+1, 3, 3, 4, 5, \dots, n); \\
&\vdots \\
r(p_1^n|S) &= (n+1, n, n-1, \dots, 4, 3, 0, 3, n+1, n, n-1, \dots, 4, 3); \\
r(p_1^{n+1}|S) &= (n+2, n+1, n, \dots, 4, 3, 0, n+2, n+1, n, \dots, 5, 4); \\
r(p_2^1|S) &= (1, 3, 4, 5, \dots, n+2, 3, 4, 5, \dots, n+1); \\
r(p_2^2|S) &= (3, 1, 3, 4, 5, \dots, n+1, 3, 3, 4, 5, \dots, n); \\
&\vdots \\
r(p_2^n|S) &= (n+1, n, n-1, \dots, 4, 3, 1, 3, n+1, n, n-1, \dots, 4, 3); \\
r(p_2^{n+1}|S) &= (n+2, n+1, n, \dots, 4, 3, 1, n+2, n+1, n, \dots, 5, 4); \\
r(q_1^1|S) &= (3, 3, 4, 5, \dots, n+2, 0, 4, 5, \dots, n+1); \\
r(q_1^2|S) &= (4, 3, 3, 4, 5, \dots, n+1, 4, 0, 4, 5, \dots, n); \\
&\vdots \\
r(q_1^n|S) &= (n+2, n+1, n, \dots, 4, 3, 3, n+2, n+1, n, \dots, 5, 4); \\
r(q_2^1|S) &= (3, 3, 4, 5, \dots, n+2, 1, 4, 5, \dots, n+1); \\
r(q_2^2|S) &= (4, 3, 3, 4, 5, \dots, n+1, 4, 1, 4, 5, \dots, n); \\
&\vdots \\
r(q_2^n|S) &= (n+2, n+1, n, \dots, 4, 3, 3, n+2, n+1, n, \dots, 5, 4).
\end{aligned}$$

Terdapat verteks bertetangga $q_1^n, q_2^n \in T_n \odot P_2$ dengan $q_1^n \neq q_2^n$ sehingga diperoleh $r(q_1^n|S) = r(q_2^n|S)$. Hal ini terjadi karena kedua verteks tersebut berada pada salinan graf P_2 yang sama dan memiliki posisi yang simetris terhadap seluruh elemen dalam himpunan S . Ketika salah

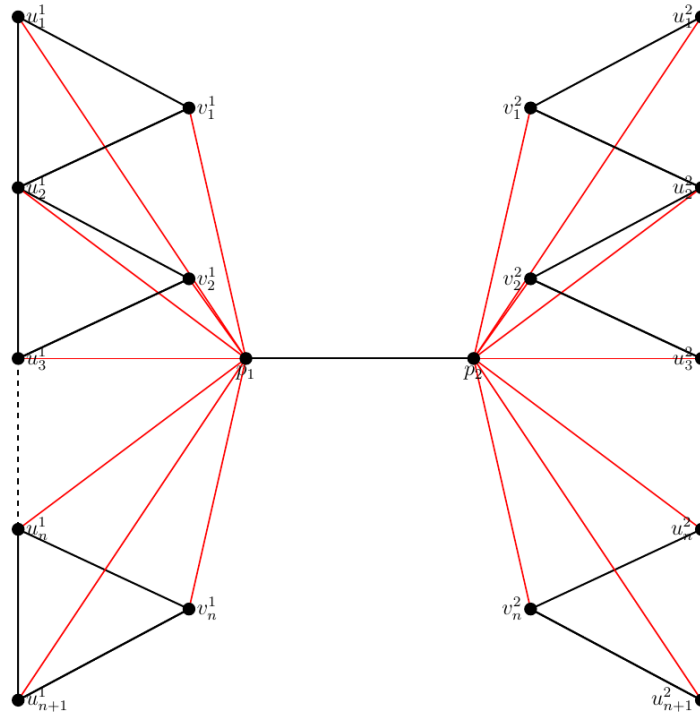
satu elemen pembeda yang sebelumnya membedakan keduanya tidak dimasukkan ke dalam S , jarak kedua verteks tersebut terhadap setiap elemen di S menjadi identik. Akibatnya, himpunan S bukan merupakan pembeda lokal. Oleh karena itu, pengandaian tersebut harus diingkar. Dengan demikian, tidak terdapat himpunan pembeda lokal dengan kardinalitas kurang dari $2n + 1$. Akibatnya, himpunan W dengan $|W| = 2n + 1$ merupakan pembeda lokal dengan kardinalitas minimum. Sehingga terbukti bahwa $\dim_{\ell}(T_n \odot P_2) = 2n + 1$. \square

Graf $P_2 \odot T_n$ dibentuk dengan mengambil sebuah graf P_2 dan salinan dari T_n yaitu H_1, H_2 . Kemudian menghubungkan semua verteks hasil salinan H_i ; $i \in [1, 2]$ dengan masing-masing himpunan verteks pada graf P_2 . Berikut ddefinisi himpunan verteks dan sisi pada graf $P_2 \odot T_n$.

$$V(P_2 \odot T_n) = \{p_m; m \in [1, 2]\} \cup \{u_i^m; i \in [1, n + 1], m \in [1, 2]\} \cup \{v_j^m; j \in [1, n], m \in [1, 2]\};$$

$$E(P_2 \odot T_n) = \{p_m p_{m+1}; m \in [1]\} \cup \{u_i^m u_{i+1}^m; i \in [1, n], m \in [1, 2]\} \cup \{u_i^m v_j^m; i \in [1, n + 1], j \in [1, n], m \in [1, 2]\} \cup \{p_m u_i^m; i \in [1, n + 1], m \in [1, 2]\} \cup \{p_m v_j^m; j \in [1, n], m \in [1, 2]\}.$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa, $|V(P_2 \odot T_n)| = 4(n + 1)$, $|E(P_2 \odot T_n)| = 10n + 3$.



Gambar 3.3: Graf $P_2 \odot T_n$

Teorema 3.4. Misalkan P_2 graf lintasan orde 2 dan T_n adalah graf ular segitiga orde $h = 2n + 1$, maka

$$\dim_{\ell}(P_2 \odot T_n) = \begin{cases} n + 3, & \text{untuk } n \text{ ganjil,} \\ n + 2, & \text{untuk } n \text{ genap.} \end{cases}$$

Bukti. Misalkan P_2 graf lintasan dan T_n graf ular segitiga orde $h = 2n + 1$. Diberikan $P_2 \odot T_n$ dengan $V(P_2 \odot T_n) = \{p_m; m \in [1, 2]\} \cup \{u_i^m; i \in [1, n + 1], m \in [1, 2]\} \cup \{v_j^m; j \in [1, n], m \in [1, 2]\}$

$[1, n], m \in [1, 2]$. Pembuktian ini akan dibedakan menjadi dua kasus. Pembuktian pada kasus pertama yaitu, akan dibuktikan $\dim_{\ell}(P_2 \odot T_n) = n + 3$, untuk n ganjil. Dipilih himpunan $W = \{u_1^1, u_2^1, u_4^1, \dots, u_{n-1}^1, u_{n+1}^1, u_1^2, u_2^2, u_4^2, \dots, u_{n-1}^2, u_{n+1}^2\}$ dan $|W| = n + 3$. Representasi setiap verteks $x \in V(P_2 \odot T_n)$ terhadap W adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
r(p_1|W) &= (1, 1, 1, \dots, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
r(p_2|W) &= (2, 2, 2, \dots, 2, 2, 1, 1, 1, \dots, 1, 1); \\
r(u_1^1|W) &= (0, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
r(u_2^1|W) &= (1, 0, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
&\vdots \\
r(u_n^1|W) &= (2, 2, 2, \dots, 2, 2, 1, 1, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
r(u_{n+1}^1|W) &= (2, 2, 2, \dots, 2, 2, 2, 0, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
r(v_1^1|W) &= (1, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
r(v_2^1|W) &= (2, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
&\vdots \\
r(v_{n+1}^1|W) &= (2, 2, 2, \dots, 2, 2, 1, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
r(u_1^2|W) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 0, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
r(u_2^2|W) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 1, 0, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
&\vdots \\
r(u_n^2|W) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 1, 1); \\
r(u_{n+1}^2|W) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 2, 0); \\
r(v_1^2|W) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
r(v_2^2|W) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 2, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
&\vdots \\
r(v_n^2|W) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 1).
\end{aligned}$$

Oleh karena setiap verteks saling *adjacent* $x, y \in V(P_2 \odot T_n)$ dan $x \neq y$ diperoleh $r(x|W) \neq r(y|W)$, maka W merupakan himpunan pembeda lokal dari graf $P_2 \odot T_n$. Andaikan terdapat himpunan pembeda lokal $S = \{u_1^1, u_2^1, u_4^1, \dots, u_{n-1}^1, u_{n+1}^1, u_1^2, u_2^2, u_4^2, u_6^2, \dots, u_{n-3}^2, u_{n-1}^2\}$ dan $|S| = n + 2 < n + 3$. Representasi setiap verteks $x \in V(P_2 \odot T_n)$ terhadap S adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
r(p_1|S) &= (1, 1, 1, \dots, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
r(p_2|S) &= (2, 2, 2, \dots, 2, 2, 1, 1, 1, \dots, 1, 1); \\
r(u_1^1|S) &= (0, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
r(u_2^1|S) &= (1, 0, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
&\vdots \\
r(u_n^1|S) &= (2, 2, 2, \dots, 2, 2, 1, 1, 3, 3, 3, \dots, 3, 3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r(u_{n+1}^1|S) &= (2, 2, 2, \dots, 2, 2, 2, 0, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
 r(v_1^1|S) &= (1, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
 r(v_2^1|S) &= (2, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
 &\vdots \\
 r(v_n^1|S) &= (2, 2, 2, \dots, 2, 2, 1, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
 r(u_1^2|S) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 0, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
 r(u_2^2|S) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 1, 0, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
 &\vdots \\
 r(u_n^2|S) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 2, 2, 2, \dots, 2, 1); \\
 r(u_{n+1}^2|S) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
 r(v_1^2|S) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
 r(v_2^2|S) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 2, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
 &\vdots \\
 r(v_n^2|S) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 2, 2, 2, \dots, 2, 2).
 \end{aligned}$$

Terdapat verteks $u_{n+1}^2, v_n^2 \in V(P_2 \odot T_n)$ yang saling *adjacent* dengan $u_{n+1}^2 \neq v_n^2$ diperoleh $r(u_{n+1}^2|S) = r(v_n^2|S)$, maka himpunan S bukan merupakan pembeda lokal. Dengan demikian, pengandaian di awal harus diingkar. Oleh sebab itu, himpunan W dengan $|W| = n + 3$ merupakan pembeda lokal dengan kardinalitas minimum. Sehingga terbukti bahwa $\dim_{\ell}(P_2 \odot T_n) = n + 3$, untuk n ganjil. Kasus kedua akan dibuktikan $\dim_{\ell}(P_2 \odot T_n) = n + 2$, untuk n genap. Dipilih himpunan $W = \{u_1^1, u_3^1, u_5^1, \dots, u_{n-1}^1, u_{n+1}^1, u_1^2, u_3^2, u_5^2, \dots, u_{n-1}^2, u_{n+1}^2\}$ dan $|W| = n + 2$. Representasi setiap verteks $x \in V(P_2 \odot T_n)$ terhadap W adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 r(p_1|W) &= (1, 1, 1, \dots, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
 r(p_2|W) &= (2, 2, 2, \dots, 2, 2, 1, 1, 1, \dots, 1, 1); \\
 r(u_1^1|W) &= (0, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
 r(u_2^1|W) &= (1, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
 &\vdots \\
 r(u_n^1|W) &= (2, 2, 2, \dots, 2, 2, 1, 1, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
 r(u_{n+1}^1|W) &= (2, 2, 2, \dots, 2, 2, 2, 0, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
 r(v_1^1|W) &= (1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
 r(v_2^1|W) &= (2, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
 &\vdots \\
 r(v_{n+1}^1|W) &= (2, 2, 2, \dots, 2, 2, 1, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
 r(u_1^2|W) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 0, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
 r(u_2^2|W) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
r(u_n^2|W) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 1, 1); \\
r(u_{n+1}^2|W) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 2, 0); \\
r(v_1^2|W) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
r(v_2^2|W) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 2, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
& \vdots \\
r(v_n^2|W) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 1).
\end{aligned}$$

Oleh karena setiap verteks $x, y \in V(P_2 \odot T_n)$ yang saling *adjacent* dan $x \neq y$ diperoleh $r(x|W) \neq r(y|W)$, sehingga himpunan W merupakan pembeda lokal dari graf $P_2 \odot T_n$. Andaikan terdapat himpunan pembeda lokal $S = \{u_1^1, u_3^1, u_5^1, \dots, u_{n-1}^1, u_{n+1}^1, u_1^2, u_3^2, u_5^2, \dots, u_{n-3}^2, u_{n-1}^2\}$ dan $|S| = n + 1 < n + 2$. Representasi setiap verteks $x \in V(P_2 \odot T_n)$ terhadap S adalah

$$\begin{aligned}
r(p_1|S) &= (1, 1, 1, \dots, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
r(p_2|S) &= (2, 2, 2, \dots, 2, 2, 1, 1, 1, \dots, 1, 1); \\
r(u_1^1|S) &= (0, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
r(u_2^1|S) &= (1, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
& \vdots \\
r(u_n^1|S) &= (2, 2, 2, \dots, 2, 2, 1, 1, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
r(u_{n+1}^1|S) &= (2, 2, 2, \dots, 2, 2, 2, 0, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
r(v_1^1|S) &= (1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
r(v_2^1|S) &= (2, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
& \vdots \\
r(v_{n+1}^1|S) &= (2, 2, 2, \dots, 2, 2, 1, 3, 3, 3, \dots, 3, 3); \\
r(u_1^2|S) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 0, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
r(u_2^2|S) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
& \vdots \\
r(u_n^2|S) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 2, 2, 2, \dots, 2, 1); \\
r(u_{n+1}^2|S) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
r(v_1^2|S) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
r(v_2^2|S) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 2, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2); \\
& \vdots \\
r(v_n^2|S) &= (3, 3, 3, \dots, 3, 3, 2, 2, 2, \dots, 2, 2).
\end{aligned}$$

Terdapat verteks $u_{n+1}^2, v_n^2 \in V(P_2 \odot T_n)$ yang saling *adjacent* dengan $u_{n+1}^2 \neq v_n^2$ diperoleh $r(u_{n+1}^2|S) = r(v_n^2|S)$, maka S bukan himpunan pembeda lokal. Akibatnya himpunan W dengan $|W| = n + 2$ merupakan himpunan pembeda lokal dengan kardinalitas paling kecil. Dengan demikian, terbukti bahwa $\dim_{\ell}(P_2 \odot T_n) = n + 2$, untuk n genap. Berdasarkan kasus pertama dan kasus kedua, maka Teorema 3.4 telah terbukti. \square

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dipaparkan, dapat disimpulkan bahwa graf ular segitiga T_n memiliki dimensi metrik dan dimensi metrik lokal yang sama, yaitu bernilai 2. Selain itu, kajian terhadap graf hasil operasi korona menunjukkan bahwa struktur graf sangat memengaruhi nilai dimensi metrik lokal. Untuk graf $T_n \odot P_2$, dimensi metrik lokal bernilai $2n + 1$. Sementara itu, pada graf $P_2 \odot T_n$, nilai dimensi metrik lokal dipengaruhi oleh paritas n , yakni bernilai $n + 3$ untuk n ganjil dan $n + 2$ untuk n genap. Hasil penelitian ini memperkaya kajian tentang dimensi metrik lokal pada graf hasil operasi korona serta menunjukkan bahwa karakteristik struktur graf, khususnya keteraturan, berperan penting dalam penentuan kardinalitas himpunan pembeda lokal minimum.

Referensi

- [1] N. A. Sutardji, L. Susilowati, and U. D. Purwati, "Dimensi metrik kuat lokal graf hasil operasi kali kartesian," *Contemp. Math. Appl*, vol. 1, pp. 64–73, 2019. [View online](#).
- [2] G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, and O. R. Oellermann, "Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 105, no. 1-3, pp. 99–113, 2000. [View online](#).
- [3] I. Javaid, M. T. Rahim, and K. Ali, "Families of regular graphs with constant metric dimension," *Utilitas mathematica*, vol. 75, no. 1, pp. 21–33, 2008. [View online](#).
- [4] C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, C. Seara, J. Cáceres, and M. L. Puertas, "On the metric dimension of some families of graphs," *Electronic notes in discrete mathematics*, vol. 22, pp. 129–133, 2005. [View online](#).
- [5] D. Marinda and S. Syafruddin, "Dimensi metrik dari graf naga tn, m ," *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 4, no. 3, pp. 25–30, 2015. [View online](#).
- [6] M. Ali, G. Ali, U. Ali, and M. Rahim, "On cycle related graphs with constant metric dimension," *Open journal of discrete mathematics*, vol. 2, no. 1, pp. 21–23, 2012. [View online](#).
- [7] R. Septiana Eka and B. Rahadjeng, "Dimensi metrik pada graf lintasan, graf komplit, graf sikel, graf bintang dan graf bipartit komplit," *MATHunesa*, vol. 3, no. 1, 2014. [View online](#).
- [8] F. Okamoto, B. Phinezy, and P. Zhang, "The local metric dimension of a graph," *Mathematica Bohemica*, vol. 135, no. 3, pp. 239–255, 2010. [View online](#).
- [9] D. Fitriani, A. Rarasati, S. W. Saputro, and E. T. Baskoro, "The local metric dimension of split and unicyclic graphs," *Indonesian Journal of Combinatorics*, vol. 6, no. 1, pp. 50–57, 2022. [View online](#).
- [10] E. D. Wulancar and T. A. Kusmayadi, "Dimensi metrik lokal pada graf musical dan graf stacked prism," *Journal of Mathematics and Mathematics Education*, vol. 8, no. 1, pp. 1–8, 2018. [View online](#).
- [11] P. Fendiyanto, "Dimensi metrik hasil operasi korona antara graf lintasan dengan graf lengkap dan graf sikel dengan graf lintasan," *Primatika: Jurnal Pendidikan Matematika*, vol. 8, no. 1, pp. 27–32, 2019. [View online](#).
- [12] S. Levin and D. Darmaji, "Dimensi metrik lokal pada amalgamasi graf lengkap dengan graf roda dan graf kincir," *Jurnal Sains dan Seni ITS*, vol. 9, no. 1, p. 486053, 2020. [View online](#).
- [13] R. Frucht and F. Harary, "On the corona of two graphs," *Aeq. Math*, vol. 4, pp. 322–325, 1970. [View online](#).
- [14] J. A. Rodríguez-Velázquez, G. A. Barragán-Ramírez, and C. García Gómez, "On the local metric dimension of corona product graphs," *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, vol. 39, no. Suppl 1, pp. 157–173, 2016. [View online](#).
- [15] T. Kusmayadi and D. Rahmadi, *Dimensi Metrik Dari Graf*. Star Digital Publishing, 2025. [View online](#).

- [16] P. Agasthi and N. Parvathi, "On some labelings of triangular snake and central graph of triangular snake graph," in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1000, p. 012170, IOP Publishing, 2018. [View online](#).
- [17] S. Sandhya, E. E. R. Merly, and S. Deepa, "Heronian mean labeling of graphs," in *International Mathematical Forum*, vol. 12, pp. 705–713, 2017. [View online](#).
- [18] R. Ponraj, S. S. Narayanan, and R. Kala, "Mean cordiality of some snake graphs," *Palestine Journal of Mathematics*, vol. 4, no. 2, pp. 439–445, 2015. [View online](#).
- [19] B. Mohamed and M. Amin, "On computing the metric dimension of the families of alternate snake graphs," *Mathematics and Computer Science*, vol. 8, no. 4, pp. 94–103, 2023. [View online](#).

Format Sitasi IEEE:

J. W. Zuha dkk. "Dimensi Metrik Lokal pada Operasi Korona Graf Ular Segitiga dengan Graf Lintasan Orde Dua", *Jurnal Diferensial*, vol. 8(1), pp. 99-110, 2026.

This work is licensed under a [Creative Commons "Attribution-ShareAlike 4.0 International"](#) license.

