



ARTIKEL PENELITIAN

Teorema Titik Tetap Kontraksi Tipe Banach–Kannan dan Konvergensi Iterasi General Picard–Mann

Syamsuddin Mas'ud^{1,*}

¹*Program Studi Matematika, Universitas Negeri Makassar, Makassar, Indonesia*

*Penulis korespondensi: syamsuddinm@unm.ac.id

Diterima: 28 Maret 2026; Direvisi: 30 Juni 2026; Disetujui: 1 Agustus 2026; Dipublikasi: 12 September 2026.

Abstrak: Teori titik tetap memiliki peran penting dalam menyelesaikan berbagai masalah yang dimodelkan dalam persamaan diferensial maupun persamaan nonlinear. Dalam banyak masalah, menemukan titik tetap secara analitik sulit dilakukan sehingga diperlukan algoritma numerik untuk mengaproksimasinya. Penelitian ini mengkaji konvergensi skema iterasi General Picard-Mann (GPM) untuk pemetaan kontraksi tipe Banach-Kannan di ruang Banach. Skema iterasi GPM merupakan kombinasi dari iterasi Picard dan Mann yang digeneralisasi dengan melakukan iterasi sebanyak k kali. Hasil utama menunjukkan bahwa pemetaan kontraksi tipe Banach-Kannan pada ruang metrik lengkap memiliki titik tetap tunggal. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa barisan yang dibangun oleh skema iterasi GPM konvergen ke titik tetap tersebut di ruang Banach dengan asumsi $\alpha + 2\beta < 1$. Penelitian ini melengkapi kajian sebelumnya dengan memperluas kelas pemetaan yang dapat didekati menggunakan iterasi GPM.

Kata Kunci: Titik Tetap; General Picard-Mann; Kontraksi Banach-Kannan; Ruang Metrik; Konvergensi

Abstract: Fixed point theory plays a crucial role in solving problems modeled by differential equations and nonlinear equations. In many problems, finding exact fixed points analytically is difficult, thus numerical algorithms are needed to approximate them. This study investigates the convergence of the General Picard-Mann (GPM) iteration scheme for Banach-Kannan type contraction mappings in Banach spaces. The GPM iteration scheme combines Picard and Mann iterations, generalized by performing k iterations. The main results show that Banach-Kannan type contraction mappings on complete metric spaces have a unique fixed point. Moreover, it is proved that sequences generated by the GPM iteration scheme converge to this fixed point in Banach spaces under the assumption $\alpha + 2\beta < 1$. This study complements previous works by extending the class of mappings that can be approximated using the GPM iteration.

Keywords: Fixed Point; General Picard-Mann; Banach-Kannan Contraction; Metric Space; Convergence

1. Pendahuluan

Teori titik tetap merupakan cabang penting dalam analisis matematika yang berperan krusial dalam menyelesaikan berbagai masalah nyata, seperti persamaan diferensial, sistem dinamik, dan masalah optimasi. Prinsip kontraksi Banach [1] menjadi fondasi utama yang menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetap pada pemetaan kontraktif di ruang metrik lengkap.

Seiring perkembangannya, berbagai generalisasi dari prinsip kontraksi Banach muncul, salah satunya adalah kontraksi Kannan [2] yang mempertimbangkan jarak antara hasil pemetaan dengan titik itu sendiri. Selanjutnya, kombinasi antara kontraksi Banach dan Kannan menghasilkan kelas pemetaan yang memenuhi kondisi:

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha\|x - y\| + \beta \max\{\|x - Tx\|, \|y - Ty\|\} \quad (1.1)$$

dengan $\alpha, \beta \geq 0$ dan $\alpha + \beta < 1$. Pemetaan yang memenuhi kondisi ini selanjutnya disebut kontraksi tipe Banach–Kannan.

Dalam banyak aplikasi, menemukan titik tetap secara analitik sulit dilakukan, sehingga diperlukan metode numerik untuk mengaproksimasinya. Berbagai skema iterasi telah dikembangkan, seperti iterasi Picard [1], Mann [3], dan Ishikawa [4]. Baru-baru ini, Shukla dkk. [5] memperkenalkan skema iterasi *General Picard–Mann* (GPM) yang menggabungkan keunggulan iterasi Picard dan Mann. Selanjutnya, Ansar dan Mas’ud [6] menerapkan iterasi GPM pada kelas pemetaan *weak contraction* di ruang Banach yang konveks seragam, serta menunjukkan bahwa skema tersebut konvergen lebih cepat dibandingkan beberapa skema iterasi lainnya. Dalam penelitian ini, iterasi GPM akan diterapkan pada kelas kontraksi tipe Banach–Kannan yang berbeda dari kelas *weak contraction* yang diteliti oleh Ansar dan Mas’ud [6]. Terdapat pemetaan yang memenuhi kontraksi tipe Banach–Kannan namun tidak termasuk dalam kelas *weak contraction*, sebagaimana ditunjukkan dalam contoh berikut.

Contoh 1.1. Misalkan ruang Banach $\mathbb{R}$ dengan norma nilai mutlak. Didefinisikan himpunan titik $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -4$, dan pemetaan $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$T(-4) = 0, \quad T(0) = 0, \quad T(1) = -4,$$

dan untuk semua $x \notin \{0, 1, -4\}$ didefinisikan $T(x) = 0$. Ambil parameter $\alpha = 0,1$ dan $\beta = 0,8$ sehingga $\alpha + \beta = 0,9 < 1$.

Pertama, diperiksa bahwa T memenuhi kontraksi tipe Banach–Kannan:

$$|Tx - Ty| \leq \alpha|x - y| + \beta \max\{|x - Tx|, |y - Ty|\}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Untuk pasangan di dalam $\{0, 1, -4\}$:

$$(0, 1) : \quad |0 - (-4)| = 4 \leq 0,1 \cdot 1 + 0,8 \cdot 5 = 4,1,$$

$$(0, -4) : \quad |0 - 0| = 0 \leq 0,1 \cdot 4 + 0,8 \cdot 4 = 3,6,$$

$$(1, -4) : \quad |-4 - 0| = 4 \leq 0,1 \cdot 5 + 0,8 \cdot 5 = 4,5.$$

Jika salah satu atau kedua titik di luar $\{0, 1, -4\}$, maka Tx atau Ty bernilai 0, dan ruas kanan selalu lebih besar atau sama dengan ruas kiri. Dengan demikian kondisi pertama terpenuhi untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$.

Kedua, ditunjukkan bahwa T tidak memenuhi kondisi *weak contraction*, yaitu tidak terdapat $\delta \in (0, 1)$ dan $L \geq 0$ sehingga

$$|Tx - Ty| \leq \delta|x - y| + L|x - Tx|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ambil $x = 0, y = 1$, maka $|T(0) - T(1)| = |0 - (-4)| = 4, |x - y| = 1$, dan $|x - Tx| = |0 - 0| = 0$. Diperoleh $4 \leq \delta \cdot 1 + L \cdot 0 = \delta$, kontradiksi karena $\delta < 1$. Jadi T bukan pemetaan *weak contraction*.

Dengan demikian, penelitian ini memperluas cakupan penerapan iterasi GPM pada kelas pemetaan yang lebih luas, yaitu kontraksi tipe Banach–Kannan, yang belum dibahas dalam penelitian sebelumnya. Adapun tujuan dari penelitian ini adalah mengkaji konvergensi skema iterasi General Picard–Mann (GPM) untuk pemetaan kontraksi tipe Banach–Kannan. Kebaruan penelitian ini terletak pada penerapan skema GPM pada kelas pemetaan tersebut yang belum dikaji sebelumnya, pemanfaatan faktor iterasi $k \in \mathbb{N}$ untuk memberikan fleksibilitas tambahan, serta analisis konvergensi yang menunjukkan bahwa parameter $a_n \in [0, 1]$ tidak memerlukan syarat tambahan seperti yang umum ditemukan dalam literatur. Dengan demikian, hasil penelitian ini melengkapi kajian sebelumnya yang hanya mencakup kelas *weak contraction* dan memperluas cakupan metode iterasi GPM pada kelas pemetaan yang lebih luas.

2. Landasan Teori

2.1. Ruang Metrik dan Ruang Banach

Konsep ruang metrik pertama kali diperkenalkan oleh Fréchet [7] sebagai abstraksi formal dari konsep jarak pada ruang Euklides. Berikut adalah definisi formalnya.

Definisi 2.1. [7–12] Misalkan X adalah himpunan tak kosong dan $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ adalah fungsi yang memenuhi:

1. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ untuk semua $x, y \in X$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ untuk semua $x, y, z \in X$.

Maka d disebut metrik dan (X, d) disebut **ruang metrik**.

Jika setiap barisan Cauchy di X konvergen ke suatu titik di X , maka (X, d) disebut **ruang metrik lengkap**.

Definisi 2.2. [13] Misalkan X adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$ (atau $\mathbb{C}$). Suatu fungsi $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ disebut **norma** jika memenuhi:

1. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ untuk semua $\lambda \in \mathbb{R}$ dan $x \in X$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk semua $x, y \in X$.

Pasangan $(X, \|\cdot\|)$ disebut **ruang bernorma**. Jika $(X, \|\cdot\|)$ lengkap terhadap metrik $d(x, y) = \|x - y\|$, maka X disebut **ruang Banach**.

2.2. Titik Tetap dan Kontraksi Tipe Banach–Kannan

Definisi 2.3. Misalkan (X, d) adalah ruang metrik dan $T : X \rightarrow X$ adalah pemetaan. Titik $p \in X$ disebut **titik tetap** dari T jika $Tp = p$. Himpunan semua titik tetap dinotasikan dengan $F(T)$.

Definisi 2.4. Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. Pemetaan $T : X \rightarrow X$ disebut **kontraksi Banach** jika terdapat konstanta $\lambda \in [0, 1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku:

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y).$$

Definisi 2.5. Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. Pemetaan $T : X \rightarrow X$ disebut **kontraksi Kannan** jika terdapat konstanta $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku:

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha (d(x, Tx) + d(y, Ty)).$$

Definisi 2.6. Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach. Pemetaan $T : X \rightarrow X$ disebut **kontraksi tipe Banach–Kannan** jika terdapat konstanta $\alpha, \beta \geq 0$ dengan $\alpha + \beta < 1$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku:

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha\|x - y\| + \beta \max\{\|x - Tx\|, \|y - Ty\|\}.$$

Remark 1. Perhatikan bahwa:

- Jika $\beta = 0$, kondisi ini tereduksi menjadi kontraksi Banach.
- Jika $\alpha = 0$, kondisi ini memberikan $\|Tx - Ty\| \leq \beta \max\{\|x - Tx\|, \|y - Ty\|\}$, yang merupakan varian dari kontraksi Kannan.

2.3. Skema Iterasi General Picard–Mann

Definisi 2.7. [5, 14] Misalkan X adalah ruang Banach, $K \subseteq X$ himpunan konveks, dan $T : K \rightarrow K$ adalah pemetaan. Barisan $\{x_n\} \subset K$ yang dibangun oleh **skema iterasi General Picard–Mann (GPM)** didefinisikan sebagai:

$$\begin{cases} x_0 \in K, \\ x_{n+1} = T^k((1 - a_n)x_n + a_nTx_n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

dengan $\{a_n\} \subset [0, 1]$ adalah barisan parameter, dan $k \in \mathbb{N}$ tetap.

Remark 2. Skema ini menggabungkan ide iterasi Picard (melalui faktor T^k) dan iterasi Mann (melalui kombinasi konveks $(1 - a_n)x_n + a_nTx_n$). Pemilihan $k = 1$ menghasilkan skema GPM standar, sedangkan $k > 1$ memberikan fleksibilitas tambahan.

3. Hasil Utama

3.1. Eksistensi dan Ketunggalan Titik Tetap

Meskipun berbagai prinsip kontraksi yang lebih umum telah banyak dikembangkan dalam literatur [15–17], formulasi yang digunakan dalam penelitian ini lebih sederhana dan mudah diverifikasi, khususnya dalam konteks analisis metode iteratif. Secara khusus, hasil ini dapat dipandang sebagai kasus khusus dari prinsip kontraksi yang lebih umum; namun demikian, bentuk eksplisit yang dihasilkan memungkinkan pembuktian yang lebih langsung dan transparan, serta memberikan kemudahan dalam penerapannya pada berbagai prosedur iteratif. Selain itu, formulasi ini juga memberikan kerangka yang efektif untuk menganalisis konvergensi skema iterasi General Picard–Mann secara lebih sistematis.

Teorema 3.1. Misalkan (X, d) adalah ruang metrik lengkap dan $T : X \rightarrow X$ adalah kontraksi tipe Banach–Kannan dengan konstanta $\alpha, \beta \geq 0$ dan $\alpha + \beta < 1$. Maka T memiliki titik tetap tunggal $p \in X$.

Bukti. **Eksistensi:** Diambil $x_0 \in X$ sebarang dan definisikan barisan $x_{n+1} = Tx_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy. Karena T adalah kontraksi tipe Banach–Kannan, memenuhi kondisi kontraksi (1.1), dengan konstanta $\alpha, \beta \geq 0$ dan $\alpha + \beta < 1$. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \\ &\leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) + \beta \max\{d(x_n, Tx_n), d(x_{n-1}, Tx_{n-1})\} \\ &= \alpha d(x_n, x_{n-1}) + \beta \max\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n)\}. \end{aligned}$$

Ada dua kasus yang diperiksa. Pertama, jika $d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_{n-1}, x_n)$, maka

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &\leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) + \beta d(x_{n-1}, x_n) \\ &= (\alpha + \beta) d(x_n, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Kedua, jika $d(x_n, x_{n+1}) \geq d(x_{n-1}, x_n)$, maka

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) + \beta d(x_{n+1}, x_n).$$

Akibatnya $d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\alpha}{1-\beta} d(x_n, x_{n-1})$. Selanjutnya, misalkan $r = \max\left\{\alpha + \beta, \frac{\alpha}{1-\beta}\right\}$. Sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $d(x_{n+1}, x_n) \leq r d(x_n, x_{n-1})$. Karena $\alpha + \beta < 1$ dan $\frac{\alpha}{1-\beta} < 1$ (perhatikan $\alpha + \beta < 1$ mengakibatkan $\beta < 1$, sehingga $1 - \beta > 0$; dan $\alpha < 1 - \beta$, jadi $\frac{\alpha}{1-\beta} < 1$), maka $r < 1$. Dengan demikian $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy. Karena X ruang metrik lengkap, maka ada $p \in X$ sehingga $x_n \rightarrow p$.

Selanjutnya, perhatikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(p, Tp) &\leq d(p, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tp) \\ &= d(p, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tp) \\ &\leq d(p, x_{n+1}) + \alpha d(x_n, p) + \beta \max\{d(x_n, Tx_n), d(p, Tp)\}. \end{aligned}$$

Karena $d(x_n, Tx_n) = d(x_n, x_{n+1})$, maka dengan mengambil $n \rightarrow \infty$ dan menggunakan kontinuitas d , diperoleh $d(p, Tp) = 0$. Jadi p adalah titik tetap T .

Ketunggalan: Andaikan $p, q \in X$ adalah sebarang titik tetap T . Maka

$$d(p, q) = d(Tp, Tq) \leq \alpha d(p, q) + \beta \max\{d(p, Tp), d(q, Tq)\} = \alpha d(p, q).$$

Karena $\alpha < 1$, maka $d(p, q) = 0$, sehingga $p = q$. Jadi titik tetap T tunggal. □

3.2. Konvergensi Skema Iterasi GPM

Sebelum memberikan teorema iterasi GPM, terlebih dahulu diberikan lema berikut yang akan digunakan untuk membuktikan teorema tersebut.

Lema 3.1. Misalkan $T : K \rightarrow K$ adalah pemetaan pada ruang Banach X yang memenuhi kondisi kontraksi tipe Banach–Kannan:

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha \|x - y\| + \beta \max\{\|x - Tx\|, \|y - Ty\|\}, \quad \forall x, y \in K,$$

dengan $\alpha, \beta \geq 0$ dan $\alpha + \beta < 1$. Jika $p \in K$ adalah titik tetap dari T , maka untuk setiap $x \in K$ berlaku:

$$\|Tx - p\| \leq \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta} \|x - p\|.$$

Lebih lanjut, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$,

$$\|T^k x - p\| \leq \left(\frac{\alpha + \beta}{1 - \beta}\right)^k \|x - p\|.$$

Bukti. Ambil $y = p$ dalam kondisi kontraksi. Karena $Tp = p$, diperoleh:

$$\|Tx - p\| = \|Tx - Tp\| \leq \alpha \|x - p\| + \beta \max\{\|x - Tx\|, \|p - Tp\|\}.$$

Karena $\|p - Tp\| = 0$, maka $\max\{\|x - Tx\|, 0\} = \|x - Tx\|$. Dengan ketaksamaan segitiga,

$$\|x - Tx\| \leq \|x - p\| + \|p - Tx\| = \|x - p\| + \|Tx - p\|.$$

Substitusi memberikan:

$$\|Tx - p\| \leq \alpha \|x - p\| + \beta (\|x - p\| + \|Tx - p\|).$$

$$\|Tx - p\| \leq (\alpha + \beta)\|x - p\| + \beta\|Tx - p\|.$$

$$(1 - \beta)\|Tx - p\| \leq (\alpha + \beta)\|x - p\|.$$

Karena $\alpha + \beta < 1$ mengakibatkan $\beta < 1$, maka $1 - \beta > 0$, sehingga:

$$\|Tx - p\| \leq \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta}\|x - p\|.$$

Pernyataan untuk T^k diperoleh dengan induksi. Untuk $k = 1$ pernyataan benar. Asumsikan pernyataan benar untuk suatu $k \geq 1$, maka:

$$\|T^{k+1}x - p\| = \|T(T^k x) - p\| \leq \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta}\|T^k x - p\| \leq \left(\frac{\alpha + \beta}{1 - \beta}\right)^{k+1}\|x - p\|.$$

Jadi pernyataan berlaku untuk semua $k \in \mathbb{N}$. □

Selanjutnya disajikan hasil berupa teorema konvergensi untuk skema iterasi General Picard–Mann (GPM). Skema ini merupakan generalisasi dari skema Picard–Mann klasik dengan mengizinkan iterasi Picard sebanyak k kali setelah satu langkah rata-rata Mann. Fleksibilitas ini memungkinkan percepatan konvergensi melalui pemilihan k yang lebih besar. Di bawah kondisi $\alpha + 2\beta < 1$, teorema berikut menunjukkan bahwa skema GPM konvergen kuat ke titik tetap tunggal dengan laju eksponensial yang dikendalikan oleh faktor θ^k , dengan $\theta = \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta}$. Hasil ini memperluas teorema konvergensi untuk skema Picard–Mann dan skema Mann pada kelas pemetaan kontraksi tipe Banach–Kannan.

Teorema 3.2. *Misalkan K adalah himpunan tak kosong, konveks, dan tertutup dalam ruang Banach X . Misalkan $T : K \rightarrow K$ adalah pemetaan yang memenuhi kondisi kontraksi tipe Banach–Kannan:*

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha\|x - y\| + \beta \max\{\|x - Tx\|, \|y - Ty\|\}, \quad \forall x, y \in K,$$

dengan $\alpha, \beta \geq 0$ dan $\alpha + 2\beta < 1$. Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan yang dibangkitkan oleh skema iterasi General Picard–Mann (GPM):

$$\begin{cases} x_0 \in K, \\ x_{n+1} = T^k((1 - a_n)x_n + a_nTx_n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

dengan $a_n \in [0, 1]$ dan $k \in \mathbb{N}$ tetap. Maka T memiliki titik tetap tunggal $p \in K$, dan barisan $\{x_n\}$ konvergen ke p .

Bukti. Pertama, karena $\alpha + 2\beta < 1$, maka $\alpha + \beta < 1$, sehingga berdasarkan Teorema 3.1 (dengan $d(x, y) = \|x - y\|$) diperoleh bahwa T memiliki titik tetap tunggal $p \in K$.

Dari Lemma 3.1, dengan asumsi $\alpha + 2\beta < 1$ kita peroleh

$$\theta := \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta} < 1,$$

dan untuk setiap $x \in K$ berlaku:

$$\|T^k x - p\| \leq \theta^k \|x - p\|. \tag{1}$$

Misalkan $y_n = (1 - a_n)x_n + a_nTx_n$. Karena K konveks dan $x_n, Tx_n \in K$, maka $y_n \in K$. Dari skema iterasi dan (1) diperoleh:

$$\|x_{n+1} - p\| = \|T^k y_n - p\| \leq \theta^k \|y_n - p\|. \tag{2}$$

Di ruang Banach, dengan ketaksamaan segitiga:

$$\|y_n - p\| = \|(1 - a_n)(x_n - p) + a_n(Tx_n - p)\| \leq (1 - a_n)\|x_n - p\| + a_n\|Tx_n - p\|. \quad (3)$$

Dari Lemma 3.1, $\|Tx_n - p\| \leq \theta\|x_n - p\|$. Substitusi ke (3):

$$\|y_n - p\| \leq (1 - a_n)\|x_n - p\| + a_n\theta\|x_n - p\| = (1 - a_n(1 - \theta))\|x_n - p\|. \quad (4)$$

Karena $\theta < 1$, maka $1 - \theta > 0$ dan $1 - a_n(1 - \theta) \leq 1$. Substitusi (4) ke (2):

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \theta^k\|x_n - p\|.$$

Dengan induksi diperoleh:

$$\|x_n - p\| \leq \theta^{kn}\|x_0 - p\|.$$

Karena $\theta^k < 1$, maka $\theta^{kn} \rightarrow 0$ saat $n \rightarrow \infty$. Akibatnya $\|x_n - p\| \rightarrow 0$, yaitu $x_n \rightarrow p$. $\square$

Perhatikan bahwa untuk menjamin faktor kontraksi $\theta = \frac{\alpha+\beta}{1-\beta} < 1$, diperlukan $\alpha + 2\beta < 1$. Oleh karena itu, dalam teorema ini kita membatasi pada pemetaan yang memenuhi kondisi tersebut.

4. Pembahasan

Hasil penelitian menunjukkan bahwa skema iterasi GPM efektif untuk mengaproksimasi titik tetap pemetaan kontraksi tipe Banach–Kannan di ruang Banach. Berdasarkan Lemma 3.1, diperoleh estimasi $\|Tx - p\| \leq \theta\|x - p\|$ dengan $\theta = \frac{\alpha+\beta}{1-\beta}$. Agar $\theta < 1$, diperlukan $\alpha + 2\beta < 1$; kondisi inilah yang digunakan dalam Teorema 3.2 untuk menjamin sifat kontraktif T terhadap titik tetapnya. Selanjutnya, dari teorema tersebut diperoleh $\|x_{n+1} - p\| \leq \theta^k\|x_n - p\|$, sehingga barisan $\{x_n\}$ konvergen ke p dengan laju geometrik.

Penelitian ini menggunakan kondisi kontraksi tipe Banach–Kannan dengan $\alpha + 2\beta < 1$. Kelas pemetaan ini memiliki struktur yang membedakannya dari *weak contraction* yang dikaji oleh Ansari dan Mas'ud [6], yaitu pemetaan yang memenuhi $\|Tx - Ty\| \leq \delta\|x - y\| + L\|x - Tx\|$ dengan $\delta \in (0, 1)$ dan $L \geq 0$. Contoh yang diberikan pada bagian pendahuluan menunjukkan bahwa terdapat pemetaan yang memenuhi kontraksi Banach–Kannan (dengan $\alpha + \beta < 1$) tetapi tidak termasuk dalam kelas *weak contraction* tersebut, sehingga hasil penelitian ini merupakan perluasan yang tidak tercakup dalam [6]. Dengan demikian, pendekatan GPM dapat diterapkan pada kelas pemetaan yang lebih luas.

Selain itu, penelitian ini juga mempertimbangkan faktor iterasi $k \in \mathbb{N}$ pada skema GPM, yang memberikan fleksibilitas tambahan dalam implementasi numerik. Hasil ini melengkapi temuan Shukla dan Panicker [14] yang menerapkan GPM pada pemetaan nonekspansif tipe (E), dengan menunjukkan bahwa pendekatan yang sama dapat diterapkan pada kelas pemetaan kontraktif yang lebih luas.

5. Kesimpulan

Penelitian ini membuktikan eksistensi dan ketunggalan titik tetap untuk pemetaan kontraksi tipe Banach–Kannan pada ruang metrik lengkap. Selain itu, skema iterasi General Picard–Mann (GPM) terbukti konvergen ke titik tetap tersebut pada ruang Banach dengan kondisi yang lebih ringan tanpa syarat tambahan pada parameter. Keunggulan skema ini terletak pada fleksibilitas parameter yang memudahkan implementasi serta kemampuan mengatur laju konvergensi melalui pemilihan jumlah iterasi Picard. Penelitian selanjutnya dapat memperluas penerapan skema GPM pada ruang yang lebih umum, seperti ruang b -metrik atau ruang metrik dengan graf, serta untuk kelas kontraksi yang lebih luas, misalnya tipe Reich atau Hardy–Rogers.

Referensi

- [1] S. Banach, “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales,” *Fundamenta Mathematicae*, vol. 3, pp. 133–181, 1922. [View online](#).
- [2] R. Kannan, “Some results on fixed points,” *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, vol. 60, pp. 71–76, 1968.
- [3] W. Mann, “Mean value methods in iteration,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 4, pp. 506–510, 1953. [View online](#).
- [4] S. Ishikawa, “Fixed points by a new iteration method,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 44, pp. 147–150, 1974. [View online](#).
- [5] R. Shukla, R. Pant, and W. Sinkala, “A general picard–mann iterative method for approximating fixed points of nonexpansive mappings with applications,” *Symmetry*, vol. 14, no. 9, p. 1741, 2022. [View online](#).
- [6] A. Ansar and S. Mas’ud, “Approximating fixed point of weak contraction mapping using general picard-mann iteration process,” in *Proceedings of the 5th International Conference on Statistics, Mathematics, Teaching, and Research 2023 (ICSMTR 2023)*, pp. 23–32, Atlantis Press, 2023. [View online](#).
- [7] M. Fréchet, “Sur quelques points du calcul fonctionnel,” *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 22, pp. 1–74, 1906. [View online](#).
- [8] S. Shirali and H. L. Vasudeva, *Metric Spaces*. London: Springer, 2006. [View online](#).
- [9] A. Adhikari and M. R. Adhikari, *Basic Topology 1: Metric Spaces and General Topology*. Singapore: Springer, 2022. [View online](#).
- [10] S. P. S. Kainth, *A Comprehensive Textbook on Metric Spaces*. Singapore: Springer, 2023. [View online](#).
- [11] S. S. Chauhan, P. Garg, and K. Thakur, “Study of metric space and its variants,” *Journal of Mathematics*, vol. 2022, p. 7142651, 2022. [View online](#).
- [12] M. A. Khamsi and W. A. Kirk, *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*. New York: Wiley-Interscience, 2001. [View online](#).
- [13] J. Muscat, *Normed Spaces*. Cham: Springer, 2024. [View online](#).
- [14] R. Shukla and R. Panicker, “Approximating fixed points of nonexpansive type mappings via general picard–mann algorithm,” *Computation*, vol. 10, no. 9, p. 151, 2022. [View online](#).
- [15] A. Latif, C. Mongkolkeha, and W. Sintunavarat, “Fixed point theorems for generalized α - β -weakly contraction mappings in metric spaces and applications,” *The Scientific World Journal*, vol. 2014, p. 784207, 2014. [View online](#).
- [16] M. Abtahi, “Fixed point theorems of Ćirić-matkowski type in generalized metric spaces,” 2015. [View online](#).
- [17] Y. Han, S.-y. Xu, and C. Ma, “Generalized kannan-type contraction and fixed point theorems,” *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, vol. 38, pp. 235–247, 2023. [View online](#).

Format Sitasi IEEE:

S. Mas’ud, “Teorema Titik Tetap Kontraksi Tipe Banach–Kannan dan Konvergensi Iterasi General Picard–Mann,” *Jurnal Diferensial*, vol. 8, no. 2, pp. 180–187, 2026.

This work is licensed under a [Creative Commons “Attribution-ShareAlike 4.0 International”](#) license.

