Jurnal Diferensial Vol. **03** No. 01, April 2021
E-ISSN: 2775-9644

PELABELAN $P_2 \rhd F_n$ AJAIB SUPER DARI GRAF $S_m \rhd F_n$

Ganesha Lapenangga Putra[1*], Erika Feronika Br Simanungkalit[2]

[1]Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana, Kupang-NTT, Indonesia
[2]Program Studi Pendidikan Ekonomi, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Nusa Cendana, Kupang-NTT, Indonesia

*Penulis Korespondensi : ganesha2373@gmail.com

Abstrak

Graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut himpunan titik dan sisi, dinotasikan dengan $G = (V, E)$. Misalkan $G = (V, E)$ dan $H = (V', E')$ suatu graf. Hasil kali sisir antara graf G dan H, dinotasikan dengan $G \rhd H$, yaitu graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan graf G dan salinan sebanyak $|V|$ dari graf H dan mengidentifikasikan salinan ke-i dari graf H ke titik ke-i pada graf G. Misalkan G suatu graf terhubung yang memuat selimut-H. Suatu pelabelan H-ajaib dari graf $G = (V, E)$ adalah suatu fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3, \ldots, |V(G)| + |E(G)|\}$, sehingga $f(H') = \sum_{v \in V'} f(v) + \sum_{e \in E'} f(e) = k$, untuk semua subgraf H' yang isomorfik dengan H dengan k suatu konstanta. Selanjutnya, graf G disebut H-ajaib super jika $f(V) = \{1,2,3, \ldots, |V(G)|\}$. Pada jurnal ini, diberikan pelabelan $P_2 \rhd F_n$ ajaib super dari graf $S_m \rhd F_n$ dengan metode multi himpunan seimbang.

Kata kunci: Graf, Pelabelan H-ajaib super, hasil kali sisir, multi himpunan seimbang.

1. PENDAHULUAN

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut himpunan(V, E) dimana Vadalah himpunan takkosong dari semua titik dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan dua titik. Himpunan titik pada graf biasanya dinotasikan dengan $V(G)$ sedangkan himpunan sisi pada graf adalah $E(G)$. Banyaknya titik dan sisi pada graf G secara berturut-turut dinotasikan sebagai $V(G)$ dan $E(G)$ [1].

Selanjutnya, diberikan definisi hasil ali sisir pada graf. Misalkan graf G dan H adalah graf terhubung yang memuat o sebagai salah satu titik pada graf H. Hasil kali sisir antara graf G dan H, dinotasikan $G \rhd H$, merupakan graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan dari graf G dan salinan sebanyak $|V(G)|$ dari graf H, kemudian menyatukan titik o pada graf H ke-i dengan titik ke-i pada graf G [2].

Suatu graf $G = (V, E)$ dikatakan memuat selimut H jika untuk setiap sisi pada graf G termuat pada suatu subgraf yang isomorfik terhadap H [3]. Selanjutnya graf G yang memuat selimut-H dikatakan H-ajaib jika terdapat fungsi bijektif $f: V \cup E \to \{1, 2, \ldots, |V| + |E|\}$ sehingga untuk setiap subgraf H' dari G yang isomorfik dengan H berlaku $f(H') = \sum_{(v \in V)} f(v) + \sum_{(e \in E)} f(e) = k$ dengan k adalah bilangan ajaib [2].

Selanjutnya, graf G disebut H-ajaib super jika $f(V) = \{1, 2, \ldots, |V|\}$ [3]. Nirmalasari Wijaya, Ryan dan Kalinowski [4] membuktikan bahwa untuk n ganjil dan sebarang k, graf kembang api $F_{k,n}$ merupakan graf $F_{2,n}$-ajaib super. Selanjutnya, Maryati, Salman, dan Baskoro [5] telah mengkarakterisasi semua graf G sehingga gabungan terpisah dari graf G merupakan graf G- ajaib super. Mereka juga telah membuktikan bilangan ajaib untuk gabungan dari graf lintasan, yakni mP_n untuk sebarang m dan n. Melanjutkan hasil yang sudah ada, maka penulis hendak memaparkan hasil mengenai pelabelan $P_2 \rhd F_n$ ajaib super dari graf $S_m \rhd F_n$.

2. MULTI HIMPUNAN SEIMBANG

Multi himpunan merupakan modifikasi himpunan yang mengijinkan unsur yang sama muncul lebih dari satu kali [6]. Berikut diberikan notasi-notasi yang digunakan terkait multi himpunan.

$$\begin{aligned} \textstyle\sum X &= \textstyle\sum_{x \in X} x \\ [p, q] &= \{x \mid p \le x \le q, x \in \mathbb{Z}\} \\ \{p\} \uplus \{p, q\} &= \{p, p, q\} \\ 4\{p, q, r, s\} &= \{p, p, p, p, q, q, q, q, r, r, r, r, s, s, s, s\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Suatu multi himpunan X dikatakan m-seimbang jika terdapat himpunan $X_1, X_2, \ldots X_m$ yang merupakan subhimpunan X dan untuk setiap $k \in [1, m]$ berlaku

$$\begin{aligned} |X_k| &= \frac{|X|}{m} \\ \textstyle\sum X_k &= \frac{\sum X}{m} \\ \textstyle\biguplus_{k=1}^{m} X_k &= X \end{aligned} \tag{2.2}$$

X_k disebut subhimpunan seimbang dari X [6]. Berikut diberikan lema terkait multi himpunan seimbang.

Lema 2.1.1 *Diberikan* $m, n \in N, m \geq 3$. *Jika* n *ganjil dan* y *genap maka* $X = (m-1)\left\{\{1\} \uplus (m-1)\left\{\biguplus_{y=2}^{3n-1} [y(m+1), y(m+1)+1]\right\}\right\} \uplus [1, 3mn + 3n + m]$ *merupakan multi himpunan* m*- seimbang.*

Bukti:

Pertama, untuk setiap $k \in [1,m]$ bentuk

$$X_k = \begin{Bmatrix} f(b_k), f(a_1), f(a_{k+1}), f(c_1^1), \dots, f(c_1^n), \\ f(c_{k+1}^1), \dots, f(c_{k+1}^n), f(d_1^1), \dots, f(d_1^{2n-1}), \\ f(d_{k+1}^1), \dots, f(d_{k+1}^{2n-1}) \end{Bmatrix} \text{ dengan}$$

$f(a_i) = i, 1 \le i \le m+1$

$f(b_k) = 3n(m+1) + (m+1) - k, 1 \le k \le m$

$$f(c_i^j) = \begin{cases} j(m+1) + (m+1) + 1 - i; & 1 \le i \le m+1, 1 \le j \le n, \ j \text{ ganjil} \\ j(m+1) + i; & 1 \le i \le m+1, 1 \le j \le n, \ j \text{ genap} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$f(d_i^l) = \begin{cases} (l+n)(m+1) + i; & 1 \le i \le m+1, 1 \le l \le 2n-1, \ l \text{ ganjil} \\ (l+n+1)(m+1) + 1 - i; & 1 \le i \le m+1, 1 \le l \le 2n-1, \ l \text{ genap} \end{cases}$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $k \in [1,m]$, $|X_k| = 6n+1$ dan

$$\begin{aligned} \textstyle\sum X_k = {} & f(b_k) + f(a_1) + f(a_{k+1}) + f(c_1^1) + f(c_1^2) + \dots + f(c_1^n) + f(c_{k+1}^1) + \dots + \\ & f(c_{k+1}^n) + \quad f(d_1^1) + \dots + f(d_1^{2n-1}) + \\ & f(d_{k+1}^1) + \dots + f(d_{k+1}^{2n-1}) \\ = {} & 9mn^2 + 9n^2 + 3mn + 6n + 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Perhatikan nilai $\sum X$ berikut.

$$\begin{aligned} \textstyle\sum X = {} & (m-1) + (m-1)\begin{pmatrix} 2(m+1) + 2(m+1) + 1 + 4(m+1) + \\ 4(m+1) + 1 + \dots + (3n-1)(m+1) + 1 \end{pmatrix} + \\ & \tfrac{(3mn+3n+m)(3mn+3n+m+1)}{2} \\ = {} & 9m^2n^2 + 6mn + 9mn^2 + 3m^2n + m \end{aligned} \quad (2.5)$$

Berdasarkan persamaan (2.4) dan (2.5), diperoleh

$$\begin{aligned} \tfrac{\sum X}{m} & = \tfrac{9m^2n^2 + 6mn + 9mn^2 + 3m^2n + m}{m} \\ & = 9mn^2 + 6n + 9n^2 + 3mn + 1 \\ & = \textstyle\sum X_k \\ \uplus_{i=1}^{m} X_k & = X \\ |X_k| & = \tfrac{|X|}{m} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Jadi, X adalah multi himpunan m-seimbang.

Lemma 2.1.2: *Diberikan* $m,n \in N$, $m \ge 3$. *Jika* m,n,y *genap, maka* $X = (m-1)\left\{\frac{m}{2} + 1, 3n(m+1)\right\} \uplus (m-1)\{\uplus_{y=1}^{3n-2} [y(m+1), y(m+1)+1]\} \uplus [1, 3mn + 3n + m]$ *merupakan multi himpunan m- seimbang.*

Bukti:

Pertama, untuk setiap $k \in [1,m]$ bentuk

$$X_k = \begin{Bmatrix} f(a_1), f(a_{k+1}), f(b_k), f(c_1^1), \dots, f(c_1^n), f(c_{k+1}^1), \dots, f(c_{k+1}^n), \\ f(d_1^1), \dots, f(d_1^{2n-1}), f(d_{k+1}^1), \dots, f(d_{k+1}^{2n-1}) \end{Bmatrix} \text{ dengan}$$

$$f(a_i) = \begin{cases} \frac{i}{2}; 1 \le i \le m+1, i \text{ genap} \\ \frac{m}{2} + \frac{i+1}{2}; 1 \le i \le m+1, i \ ganjil \end{cases}$$

$$f(b_k) = \begin{cases} 3n(m+1) + \frac{m}{2} + \frac{k+1}{2}, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ 3n(m+1) + \frac{k}{2}, k \text{ genap} \end{cases} \tag{2.7}$$

$$f(c_i^j) = \begin{cases} j(m+1) + (m+1) + 1 - i; 1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq n, j \text{ ganjil} \\ j(m+1) + i \quad ; 1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq n, j \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(d_i^l) = \begin{cases} (l+n+1)(m+1) + 1 - i;\ 1 \leq i \leq m+1, 1 \leq l \leq 2n-1, l \text{ ganjil} \\ (l+n)(m+1) + i; 1 \leq i \leq m+1,\ 1 \leq l \leq 2n-1,\ l \text{ genap} \end{cases}$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $k \in [1, m]$, $|X_k| = 6n + 1$. Selanjutnya, berdasarkan nilai k, bukti dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1. k ganjil

$$\begin{aligned} \sum X_k &= f(b_k) + f(a_1) + f(a_{k+1}) + f(c_1^1) + f(c_1^2) + \cdots + f(c_1^n) + f(c_{k+1}^1) + \cdots + \\ &\quad f(c_{k+1}^n) + f(d_1^1) + \cdots + f(d_1^{2n-1}) + \\ &\quad f(d_{k+1}^1) + \cdots + f(d_{k+1}^{2n-1}) \\ &= 9mn^2 + 9n^2 + 3mn + 6n + m \end{aligned}$$

Kasus 2. k genap

$$\begin{aligned} \sum X_k &= f(b_k) + f(a_1) + f(a_{k+1}) + f(c_1^1) + f(c_1^2) + \cdots + f(c_1^n) + f(c_{k+1}^1) + \cdots + \\ &\quad f(c_{k+1}^n) + f(d_1^1) + \cdots + f(d_1^{2n-1}) + \\ &\quad f(d_{k+1}^1) + \cdots + f(d_{k+1}^{2n-1}) \\ &= 9mn^2 + 9n^2 + 3mn + 6n + m \end{aligned}$$

Perhatikan nilai $\sum X$ berikut.

$$\begin{aligned} \sum X &= (m-1)\left(\frac{m}{2} + 1\right) + \frac{(m-1)}{2}\left(\frac{3n}{2}\right)[2(m+1) + 3n(m+1)] \\ &\quad + \frac{(m-1)}{2}\left(\frac{3n-2}{2}\right)[2(m+1) + 1 + (3n-2)(m+1) + 1] \\ &\quad + \frac{3mn+3n+m}{2}[3mn + 3n + m + 1] \\ &= 9m^2n^2 + 9mn^2 + 3m^2n + 6mn + m^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Berdasarkan persamaan (2.4) dan (2.5), diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\sum X}{m} &= \frac{9m^2n^2 + 9mn^2 + 3m^2n + 6mn + m^2}{m} \\ &= 9mn^2 + 9n^2 + 3mn + 6n + m \\ &= \sum X_k \end{aligned}$$

$$\biguplus_{i=1}^{m} X_k = X \tag{2.9}$$

$$|X_k| = \frac{|X|}{m}$$

Jadi, X adalah multi himpunan m-seimbang.

3. HASIL UTAMA

Graf $S_m \rhd F_n$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan graf bintang dan m salinan dari graf kipas F_n, kemudian menempelkan titik ke-i dari graf kipas ke titik pada graf bintang S_m, untuk $i \in 1,2,3,\ldots,m$. Berikut diberikan himpunan sisi dan titik dari graf $S_m \rhd F_n$.

$V(S_m \rhd F_n) = \{v_i | 1 \leq i \leq m+1\} \cup \{v_i^j | 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m+1\}$

$E(S_m \rhd F_n) = \{e_k | 1 \leq k \leq m\} \cup \{e_i^l | 1 \leq l \leq 2n-1, 1 \leq i \leq m+1\}$

Berikut merupakan teorema tentang pelabelan $P_2 \rhd F_n$ −ajaib super pada graf $S_m \rhd F_n$.

Teorema 3.1. *Graf $S_m \rhd F_n$ merupakan graf $P_2 \rhd F_n$-ajaib super untuk*

a. $m \geq 3, n \geq 3, m, n \in \mathbb{N}, n$ *bilangan ganjil*

b. $m \geq 3, n \geq 3, m, n \in \mathbb{N}, m, n$ *bilangan genap*

Bukti:

Bukti dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1: n ganjil

Berikut diberikan fungsi pelabelan graf $S_m \rhd F_n$ untuk n ganjil $m, n \in N$.

$f(v_i) = i, 1 \leq i \leq m + 1$

$f(e_k) = 3n(m + 1) + (m + 1) - k, 1 \leq k \leq m$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} j(m+1) + (m+1) + 1 - i; & 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{m} + 1, 1 \leq j \leq n,\ j \text{ ganjil} \\ j(m+1) + i; & 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{m} + 1, 1 \leq j \leq n,\ j \text{ genap} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$f(e_i^l) = \begin{cases} (l+n)(m+1) + i; & 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{m} + 1, 1 \leq l \leq 2n - 1,\ l \text{ ganjil} \\ (l+n+1)(m+1) + 1 - i; & 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{m} + 1, 1 \leq l \leq 2n - 1,\ l \text{ genap} \end{cases}$$

dengan $f(v_i)$ merupakan fungsi pelabelan titik pada graf bintang, $f(e_k)$ merupakan fungsi pelabelan sisi pada graf bintang, $f(v_i^j)$ merupakan fungsi pelabelan titik pada graf kipas, dan $f(e_i^l)$ merupakan fungsi pelabelan sisi pada graf kipas. Berdasarkan Lema 2.1.1, diperoleh $f(a_i) = f(v_i)$,$f(b_k) = f(e_k)$, $f(c_i^j) = f(v_i^j)$, dan $f(d_i^l) = f(e_i^l)$. Perhatikan bahwa X_k merupakan label titik dan sisi dari subgraf $P_2 \rhd F_n$ ke-k pada graf $S_m \rhd F_n$. Menurut Lema 2.1.1, jumlahan label titik dan sisi dari setiap subgraf $P_2 \rhd F_n$ bernilai sama, yakni $9mn^2 + 9n^2 + 3mn + 6n + 1$. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa fungsi pelabelan yang diberikan merupakan fungsi bijektif. Perhatikan daerah hasil dari partisi masing-masing fungsi f berikut.

$f(\{v_i | 1 \leq i \leq m + 1\}) = [1, m + 1]$

$f(\{v_i^j | 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m + 1\}) = [m + 2, mn + m + n + 1]$ (3.2)

$f(\{e_i^j | 1 \leq l \leq 2n - 1, 1 \leq i \leq m + 1\}) = [mn + m + n + 2, 3mn + 3n]$

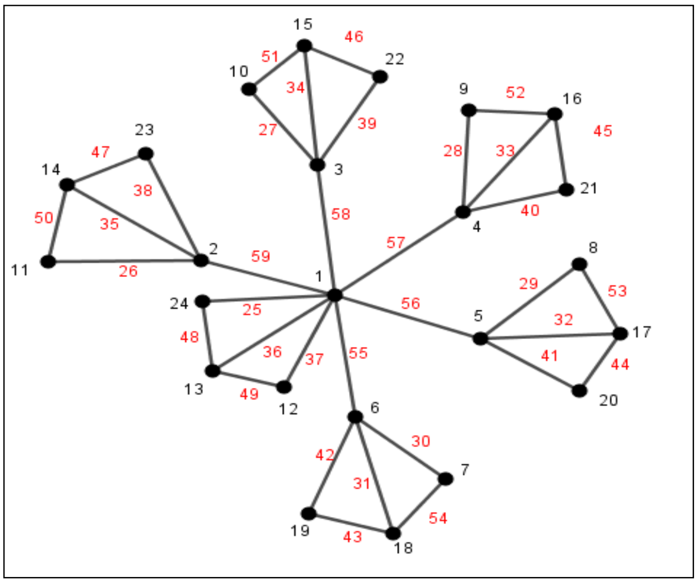
$f(\{e_k | 1 \leq k \leq m\}) = [3mn + 3n + 1, 3mn + m + 3n]$

Daerah asal dan daerah hasil dari partisi masing-masing fungsi berjumlah sama. Selanjutnya $f: V \cup E \to \{1,2, \ldots, |V| + |E|\}$. Banyaknya unsur di daerah asal fungsi f adalah $|V \cup E| = 3mn + m + 3n$, sedangkan banyaknya unsur pada daerah kawan sama dengan banyaknya unsur pada daerah hasil, yakni $3mn + m + 3n$. Akibatnya, f fungsi bijektif.

Kasus 2: m dan n genap.

Untuk kasus 2, dengan menggunakan Lema 2.1.2 dan cara yang sama pada kasus 1, maka dapat diperoleh fungsi pelabelan yang bijektif dengan jumlahan label titik dan sisi yang sama pada setiap subgraf $P_2 \rhd F_n$, yakni $= 9mn^2 + 9n^2 + 3mn + 6n + m$.

Berdasarkan kedua kasus di atas, diperoleh bahwa graf $S_m \rhd F_n$ merupakan graf $P_2 \rhd F_n$ ajaib super untuk $m \geq 3, n \geq 3$ dengan **(a)** n ganjil dan **(b)** m, n genap. ■



Gambar 3.1. Pelabelan $\boldsymbol{P_2 \rhd F_3}$ ajaib super pada graf $\boldsymbol{S_5 \rhd F_3}$

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil di atas, disimpulkan bahwa graf $S_m \rhd F_n$ merupakan graf $P_2 \rhd F_n$ ajaib super untuk $m \geq 3, n \geq 3, m, n \in \mathbb{N}$ dengan **(a)** n ganjil dan **(b)** m, n genap. Selanjutnya, penulis menyarankan untuk memeriksa pada kasus m ganjil dan n genap.

DAFTAR PUSTAKA

[1] G. Chartrand and P. Zhang, *A First Course in Graph Theory*. Dover Publications, 2012. [Online]. Available: https://books.google.co.id/books?id=ocIr0RHyI8oC

[2] W. S. Suhadi, M. Novi, and A. P. Ira, "The Metric Dimension of Comb Product Graphs.," *MATEMATIK VESNIK*, vol. 69, no. 4, pp. 248–258, 2017.

[3] J. A. Galian, "A Dynamic Survey of Graph Labeling," *Electronic Journal of Combinatorics*, 2020.

[4] R. W. N. Wijaya, A. S. Fenovcikova, J. Ryan, and T. Kalinowski, "H-Supermagic Labelings for Firecrackers, Banana Tress and Flower," vol. 69, no. 3, pp. 442–451, 2017.

[5] T. K. Maryati, E. T. Baskoro, and A. N. M. Salman, "P_h- (super) magic labelings of some trees," *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, vol. 65, pp. 197–204, 2008.

[6] T. K. Maryati, A. N. M. Salman, E. T. Baskoro, J. Ryan, and R. Miller, "On H-supermagic labelings for certain schakles and amalgamations of a connected graph, Util. Math., 83, 333-342.," *Util. Math.*, vol. 83, pp. 333–342, 2010.