Jurnal Diferensial, Volume 03, Nomor 02, November 2021
E-ISSN: 2775-9644

GRAF PRIMA PADA RING

Nurahmi Purnamasari[1], Ganesha Lapenangga Putra[1*], Keristina Br. Ginting[1]

1. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana, Kupang, Nusa Tenggara Timur

ABSTRAK

Graf prima pada ring yang dinotasikan dengan $PG(R)$ merupakan graf yang terdiri atas pasangan terurut *(V,E)* di mana himpunan sisinya adalah $V = R$ dan himpunan titiknya adalah $E = \left\{ \overline{xy} \mid xRy = 0 \vee yRx = 0, x \neq y \right\}$. Untuk R ring prima, maka $PG(R)$ merupakan graf bintang atau dapat pula dikatakan untuk n bilangan prima, $PG(\mathbf{Z}_n)$ graf bintang. Selain mendefinisikan graf prima, pada tulisan ini akan dijelaskan karakteristik dari graf prima pada ring seperti bentuk graf jika R adalah ring domain dengan $|R| < \infty$, jika R_S adalah ring semiprima, maka R_S juga merupakan ring prima dimana graf yang dibentuk adalah graf bintang yang juga merupakan graf pohon dan jika $PG(R)$ adalah graf pohon maka R_S adalah ring prima, serta menentukan jumlah subgraf C_3 yang berbeda pada graf $PG(\mathbf{Z}_n)$. Selanjutnya tulisan ini dapat dilanjutkan untuk melihat bentuk graf dan banyaknya segitiga pada ring $\mathbf{Z}_n$ dengan n adalah sebarang bilangan bulat.

Kata Kunci : Graf prima, ring prima, ring domain, ring semiprima, graf bintang

1. PENDAHULUAN

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang sangat penting di mana matematika mempunyai sebuah kelebihan yang bisa diaplikasikan ke dalam beberapa aspek tak terkecuali teknologi. Matematika menjadi dasar terkuat bagi terciptanya dunia teknologi dan segala kemajuan didalamnya, terbukti dengan tidak ada satupun teknologi yang luput dari peran matematika didalamnya. Matematika terbagi atas berbagai bidang diantaranya ada Teori Graf. Teori graf diperkirakan pertama kali diperkenalkan pada tahun 1936 oleh seorang matematikawan Swiss, Leonhard Euler yang menulis artikel ilmiah di bidang teori graf dengan judul "*Seven Bridges of Königsberg*". Graf sendiri merupakan pasangan terurut *(V,E)* dimana *V* adalah himpunan tak kosong dari objek yang disebut titik *(vertex* atau *node)* dan *E* adalah himpunan yang anggotanya dibentuk oleh dua titik yang disebut sisi *(edge)* [1]. Selain

Teori Graf, di Matematika masih terdapat berbagai macam bidang yang menarik untuk dipelajari salah satu diantaranya adalah Aljabar. Secara umum, aljabar sendiri merupakan ilmu yang mempelajari simbol-simbol matematika dan aturan untuk memanipulasi simbol-simbol tersebut. Aljabar juga terdiri atas beberapa struktur seperti grup, grup abelian, dan ring

Sejak pertengahan abad ke-19, Matematika terus mengalami perkembangan seiring dengan perkembangan zaman. Pada tahun 1983, aljabar graf diperkenalkan oleh Mcnulty dan Shallon sebagai cara untuk memberikan struktur aljabar pada graf berarah yang sejak saat itu telah banyak digunakan dr bidang aljabar. Hal ini membuktikan bahwa ada keterkaitan antara aljabar secara umum dengan teori graf. Sesuai dengan penjelasan di atas dan dengan melihat berbagai keterkaitan antara bidang matematika yang satu dengan lainnya, maka penulis tertarik untuk membahas definisi dan karakteristik *"Graf Prima pada Ring"* yang juga merupakan keterkaitan lainnya antara teori graf dengan salah satu unsur pada aljabar yaitu ring.

2. METODE

Penulisan dalam kajian ini menggunakan metode studi literature, dimana beberapa sumber referensi akan dikumpulkan lalu kemudian dilakukan kajian khusus terkait graf prima pada ring. Sumber yang digunakan dalam pengkajian dan penulisan ini diambil dari beberapa buku referensi, jurnal-jurnal ilmiah serta artikel web lainnya.

3. HASIL PENELITIAN

Pada bagian ini akan diberikan pembahasan lebih lanjud terkait graf prima pada ring berdasarkan jurnal yang dipublikasikan pertama kali oleh Dr. Bhavanari Satyanarayana, Dasari Nagaraju, dan Kuncham Syam Prasad [2]–[4].

3.1 Definisi

Misalkan R adalah suatu ring. Sebuah Graf $G(V,E)$ dikatakan sebagai graf prima pada ring (yang dinotasikan dengan $PG(R)$), jika $V = R$ dan $E = \left\{ \overline{xy} \mid xRy = 0 \vee yRx = 0, x \neq y \right\}$ [5].

Untuk setiap graf $PG(R)$, dimana $R = \mathbf{Z}_n, 1 \leq n \leq 5$. Maka Graf tersebut adalah graf bintang, yang dimana tidak terdapat segitiga didalamnya. Hal ini juga berlaku untuk setiap graf $PG(R)$, dimana $R = \mathbf{Z}_n, n$ adalah bilangan prima. Selanjudnya dijelaskan lebih lanjud pada **Teorema 3.2**.

3.2 Teorema

Misalkan $(R,+,.)$ suatu ring dengan $|R|<\infty$. jika r adalah ring domain, maka $PG(R)$ adalah graf bintang $K_{1,|R|-1}=S_{|R|-1}$ [5].

Bukti :

Diketahui bahwa $PG(R)=(V,E)$ dengan $V=R$.

Ambil sebarang $x,y\in V=R$ dengan $x\neq 0$ dan $y\neq 0$.

Pandang $xR=\{xr\mid r\in R\}$. Perhatikan bahwa karena R ring domain, maka untuk $y\neq 0$, $0\neq xy\in xR$ akibatnya $xR\neq\{0\}$.

Pandang $xRy, xy\in xR$ dan $xy\neq 0$. Perhatikan bahwa karena R ring domain, maka $(xy).y\neq 0$ dengan $(xy).y\in xRy$.

Diperoleh $xRy\neq\{0\}$.

Selanjutnya, pandang $yR=\{yr\mid r\in R\}$. Perhatikan bahwa karena R ring domain, maka untuk $x\neq 0$, $0\neq yx\in yR$ sehingga akibatnya $yR\neq\{0\}$.

Pandang $yRx, yx\in yR$ dan $yx\neq 0$. Perhatikan bahwa karena R ring domain, maka $(yx).x\neq 0$ dengan $(yx).x\in yRx$.

Diperoleh $yRx\neq\{0\}$

Jadi, untuk setiap $x,y\in R$ dengan $x\neq 0$ dan $y\neq 0$ maka $\overline{xy}\notin \mathrm{E}(PG(R))$.

Perhatikan jika $x=0_R$ dan $y\neq 0\in R$, maka $xR=\{0\}$ dan $(xr)y=\{0\}$, sehingga $\overline{0_R y}\in \mathrm{E}(PG(R))$. Perhatikan juga bahwa karena ini berlaku untuk sebarang $y\neq 0\in R$, maka $d(0_R)=|R|-1$ dan untuk sebarang $x\neq 0\in R$, maka $d(x)=1$ akibatnya $PG(R)$ adalah graf dengan ciri satu titik berderajat $|R|-1$ dan titik lainnya berderajat 1.

Sehingga diperoleh $PG(R)=S_{|R|-1}$.

Akibat 3.3 :

Untuk n bilangan prima, $PG(\mathbf{Z}_n)$ adalah graf bintang.

Bukti :

Diketahui bahwa $\mathbf{Z}_n$ merupakan suatu ring dengan n adalah bilangan prima.

Ambil sebarang $\overline{x},\overline{y}\in \mathbf{Z}_n$ dengan $\overline{x}\neq\overline{0}$ dan $\overline{y}\neq\overline{0}$.

Untuk $\overline{xy}=xy \bmod n$, n tidak habis membagi x dan n tidak habis membagi y sehingga n pun tidak habis membagi xy.

Akibatnya $\overline{xy} \neq \overline{0}$ diperoleh $\mathbf{Z}_n$ ring domain $PG(\mathbf{Z}_n) = S_{|n|-1}$.

3.4 Teorema

Misalkan R_S adalah ring semiprima, maka pernyataan berikut ekuivalen.

a) R_S adalah ring prima
b) $PG(R)$ adalah graf bintang
c) $PG(R)$ adalah graf pohon

(Satyanarayana, 2012)

Bukti :

$a) \to b)$: misalkan $e = xy \in E(PG(R))$. Berdasarkan definisi dari Graf $PG(R)$ pada 4.1, $x \neq y$. Selanjutnya jika $xRy = 0$ atau $yRx = 0$ maka $x = 0$ atau $y = 0$. Karena R merupakan ring prima, Akibatnya e adalah sisi yang terbentuk dari salah satu anggota pada R dengan titik ujungnya adalah 0. Hal ini menunjukan bahwa setiap sisi yang terbentuk pada graf $PG(R)$ hanya bertetangga dengan titik 0, sehingga terbukti jika R_S adalah ring prima maka $PG(R)$ adalah graf bintang.

$b) \to c)$: $PG(R)$ adalah graf bintang, sehingga setiap sisi yang terbentuk pada graf $PG(R)$ hanya bertetangga dengan titik u 0, sehingga terbukti, jika $PG(R)$ adalah graf bintang maka $PG(R)$ merupakan graf pohon.

$c) \to a)$: (Dibuktikan dengan metode kontradisksi) Andaikan terdapat $x, y \in R, x \neq 0, y \neq 0$ sehingga $xRy = \{0\}$, akibatnya $\overline{xy} \in E(PG(R))$. Selanjutnya, perhatikan sisi $\overline{0_R x}$, $\overline{xy}$ dan $\overline{y0_R}$, terdapat siklus pada Graf $PG(R)$.

Hal ini kontradiksi dengan fakta bahwa $PG(R)$ merupakan graf pohon.

Sehingga terbukti, jika $PG(R)$ adalah graf pohon maka R_S adalah ring prima.

3.5 Teorema

Misalkan $\mathbf{Z}_n$ suatu ring. Jika $n = 2p$ untuk p bilangan prima, maka terdapat tepat $(p-1)$ subgraf C_3 yang berbeda pada graf $PG(\mathbf{Z}_n)$.

Bukti :

Misalkan $\mathbf{Z}_n$ suatu ring dan $n = 2p$ dengan p adalah bilangan prima.

Perhatikan bahwa $V(PG(\mathbf{Z}_{2P})) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{2p-1}\}$,sehingga :

a) $\overline{0}$ bertetangga dengan $\overline{i}$ untuk setiap $i=\{1,2,3,...,2p-1\}$

Karena $\overline{0}\mathbf{Z}_{2P}\overline{i}=\{\overline{0}\}$

b) Pandang $A=\{\overline{2},\overline{4},\overline{6},...,\overline{2p-2}\}$

Perhatikan bahwa untuk setiap $\overline{x}\in A$, maka :

$$\overline{x}\mathbf{Z}_{2P}\,\overline{p}=\{\overline{x}\overline{y}\overline{p}\mid\overline{y}\in\mathbf{Z}_{2p}\}$$
$$=\{\overline{xy}\overline{p}\mid\overline{y}\in\mathbf{Z}_{2p}\}$$
$$=\{\overline{0}\overline{y}\mid\overline{y}\in\mathbf{Z}_{2p}\}$$
$$=\{0\}$$

Sehingga diperoleh bahwa $\overline{x}\overline{p}\in E(PG(\mathbf{Z}_{2P}))$.

c) Selanjudnya dibuktikan bahwa jika $\overline{a}\overline{b}\in E(PG(\mathbf{Z}_{2P}))$ dengan $\overline{a}\neq 0$ dan $\overline{b}\neq 0$ maka salah satu dari keduanya adalah $\overline{p}$ dan yang lainnya adalah anggota dari A.

Bukti:

Diketahui bahwa $\overline{a}\overline{b}\in E(PG(\mathbf{Z}_{2P}))$, maka berdasarkan definisi :

$$\overline{a}\mathbf{Z}_{2p}\overline{b}=\{\overline{0ab},\overline{1ab},\overline{2ab},\overline{3ab},...,\overline{(2p-1)ab}\}$$
$$=\{\overline{0},\overline{ab},\overline{2ab},\overline{3ab},...,\overline{(2p-1)ab}\}$$
$$=\{\overline{0}\}$$

Artinya, dapat diperoleh bahwa $\overline{ab}=\overline{0}$ atau $ab=(2p)k;k\in\mathbf{Z}$.

Oleh karena $2p$ habis membagi ab, maka p habis membagi ab.

Sehingga untuk p bilangan prima, maka p habis membagi a atau p habis membagi b. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan p habis membagi a.

Karena $a=\{1,2,3,...,2p-1\}$, maka diperoleh $a=p$.

Sehingga untuk 2 habis membagi b, dapat dikatakan bahwa b adalah bilangan genap. Oleh karena $A=\{\overline{2},\overline{4},\overline{6},...,\overline{2p-2}\}$, $\overline{b}\in\mathbf{Z}_{2p}$, dan $\overline{b}\neq 0$, maka diperoleh $\overline{b}\in A$.

Setelah diperlihatkan a), b), dan c), perhatikan untuk setiap $\overline{x}\in A=\{\overline{2},\overline{4},\overline{6},...,\overline{2p-2},\}$

Diperoleh :

$\overline{0}\overline{x} \in E\left(PG\left(\mathbf{Z}_{2p}\right)\right)$

$\overline{x}\overline{p} \in E\left(PG\left(\mathbf{Z}_{2p}\right)\right)$

$\overline{p}\overline{0} \in E\left(PG\left(\mathbf{Z}_{2p}\right)\right)$

Sehingga dapat dilihat bahwa $\overline{0}-\overline{x}-\overline{p}-\overline{0}$ merupakan subgraf dari $PG\left(\mathbf{Z}_{2p}\right)$.
Akibatnya terdapat tepat $(p-1)$ subgraf C_3 yang berbeda pada $PG\left(\mathbf{Z}_{2p}\right)$.

3.6 Teorema

Misalkan $\mathbf{Z}_n$ suatu ring. Jika $n = p.q$ untuk p dan q bilangan prima, maka terdapat tepat $(p-1)(q-1)$ subgraf C_3 yang berbeda pada graf $PG(\mathbf{Z}_n)$.

Bukti :

Misalkan $\mathbf{Z}_n$ suatu ring dan $n = pq$ dengan p dan q adalah bilangan prima.
Perhatikan bahwa $V\left(PG\left(\mathbf{Z}_{pq}\right)\right) = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, ..., \overline{(pq)-1}\right\}$,sehingga :

a) $\overline{0}$ bertetangga dengan $\overline{i}$ untuk setiap $i = \{1, 2, 3, ..., (pq)-1\}$

Karena $\overline{0}\mathbf{Z}_{pq}\overline{i} = \left\{\overline{0}\right\}$.

b) Pandang $A = \left\{\overline{p}, \overline{2p}, \overline{3p}, ..., \overline{(q-1)p}\right\}$ dan $B = \left\{\overline{q}, \overline{2q}, \overline{3q}, ..., \overline{(p-1)q}\right\}$

Perhatikan bahwa untuk setiap $\overline{x} \in A$ dan $\overline{y} \in B$ sebarang, maka : $\overline{x}\mathbf{Z}_{pq}\overline{y} = \left\{\overline{0}\right\}$

Diketahui berdasarkan definisi :

$\overline{x}\mathbf{Z}_{pq}\overline{y} = \left\{\overline{0}, \overline{xy}, \overline{2xy}, ..., \overline{(pq-1)xy}\right\}$

Karena telah diketahui bahwa $\overline{x}\mathbf{Z}_{pq}\overline{y} = \left\{\overline{0}\right\}$ maka $\overline{x}\overline{y} = \overline{0}$.

Sehingga diperoleh bahwa $\overline{x}\overline{y} \in E\left(PG\left(\mathbf{Z}_{pq}\right)\right)$.

c) Selanjudnya dibuktikan bahwa jika $\overline{a}\overline{b} \in E\left(PG\left(\mathbf{Z}_{pq}\right)\right)$ dengan $\overline{a} \neq 0$ dan $\overline{b} \neq 0$ maka salah satu dari $\overline{a}$ atau $\overline{b}$ adalah anggota A dan lainnya adalah anggota B .

Bukti:

Diketahui bahwa $\overline{a}\overline{b} \in E\left(PG\left(\mathbf{Z}_{pq}\right)\right)$

Akibatnya $\overline{a}\mathbf{Z}_{pq}\overline{b} = \left\{\overline{0}\right\}$, sebab berdasarkan definisi:

$\overline{a}\mathbf{Z}_{pq}\overline{b} = \left\{\overline{0ab}, \overline{1ab}, \overline{2ab}, \overline{3ab}, ..., \overline{((pq)-1)ab}\right\}$

$$=\left\{\overline{0},\overline{ab},\overline{2ab},\overline{3ab},\ldots,\overline{\left((pq)-1\right)ab}\right\}$$
$$=\left\{\overline{0}\right\}$$

Yang artinya, $\overline{ab}=\overline{0}$ atau $ab=(pq)s$ dengan $s\in\mathbf{Z}$, sehingga pq habis membagi ab. Oleh karena $\overline{a}\neq 0$ dan $\overline{b}\neq 0$ maka pq tidak habis membagi a dan pq tidak habis membagi b. Selanjudnya karena p dan q adalah bilangan prima, maka dapat diperoleh bahwa p habis membagi a dan q habis membagi b atau p habis membagi b dan q habis membagi a, sehingga tanpa mengurangi keumuman jika p habis membagi a dan q habis membagi b maka diperoleh $p=a\in A$ dan $q=b\in B$.

Setelah diperlihatkan a), b), dan c), perhatikan bahwa untuk setiap $E\left(PG\left(\mathbf{Z}_{pq}\right)\right)=\left\{\overline{0}\overline{x}\mid\overline{x}\in V\left(PG\left(\mathbf{Z}_{pq}\right)\right)\right\}$ dan $V\left(PG\left(\mathbf{Z}_{pq}\right)\right)=\left\{\overline{a}\overline{b}\mid\overline{a}\in A,\overline{b}\in B\right\}$ terdapat $(p-1)(q-1)$ segitiga berbeda, yaitu :

$\overline{0}-\overline{p}-\overline{q}-\overline{0}$, $\overline{0}-\overline{p}-\overline{2q}-\overline{0}$, $\overline{0}-\overline{p}-\overline{3q}-\overline{0}$, $\overline{0}-\overline{p}-\overline{4q}-\overline{0}$, . . . , $\overline{0}-\overline{p}-\overline{(p-1)q}-\overline{0}$,

$\overline{0}-\overline{2p}-\overline{q}-\overline{0}$, $\overline{0}-\overline{2p}-\overline{2q}-\overline{0}$, $\overline{0}-\overline{2p}-\overline{3q}-\overline{0}$, . . . , $\overline{0}-\overline{2p}-\overline{(p-1)q}-\overline{0}$

$\overline{0}-\overline{3p}-\overline{q}-\overline{0}$, $\overline{0}-\overline{3p}-\overline{2q}-\overline{0}$, $\overline{0}-\overline{3p}-\overline{3q}-\overline{0}$, . . . , $\overline{0}-\overline{3p}-\overline{(p-1)q}-\overline{0}$

.
.
.

$\overline{0}-\overline{(q-1)p}-\overline{q}-\overline{0}$, $\overline{0}-\overline{(q-1)p}-\overline{2q}-\overline{0}$, . . . , $\overline{0}-\overline{(q-1)p}-\overline{(p-1)q}-\overline{0}$

Akibatnya terdapat tepat $(p-1)(q-1)$ subgraph C_3 yang berbeda pada $PG\left(\mathbf{Z}_{pq}\right)$.

4. SIMPULAN

Dari beberapa pembahasan diatas, dapat disimpulkan bahwa :

1. Graf prima pada ring merupakan graf yang terdiri atas pasangan terurut *(V,E)* di mana himpunan sisinya adalah $V=R$ dan himpunan titiknya adalah $E=\left\{\overline{xy}\mid xRy=0\vee yRx=0, x\neq y\right\}$. Graf ini dinotasikan dengan $PG(R)$.
2. Berikut merupakan karakteristik dari graf prima pada ring, yaitu :

a) Untuk R ring prima, maka $PG(R)$ merupakan graf bintang atau dapat pula dikatakan untuk n bilangan prima, $PG(\mathbf{Z}_n)$ graf bintang.
b) Misalkan $(R,+,.)$ suatu ring dengan $|R|<\infty$. Jika R adalah ring domain, maka $PG(R)$ adalah graf bintang $K_{1,|R|-1}=S_{|R|-1}$.
c) Misalkan R_S adalah ring semiprima, maka R_S juga merupakan ring prima di mana graf yang dibentuk adalah graf bintang yang juga merupakan graf pohon dan jika $PG(R)$ adalah graf pohon maka R_S adalah ring prima.
d) Misalkan $\mathbf{Z}_n$ suatu ring. Jika $n=2p$ untuk p bilangan prima, maka terdapat tepat $(p-1)$ subgraf C_3 yang berbeda pada graf $PG(\mathbf{Z}_n)$.
e) Misalkan $\mathbf{Z}_n$ suatu ring. Jika $n=p.q$ untuk p,q bilangan prima, maka terdapat tepat $(p-1)(q-1)$ subgraf C_3 yang berbeda pada graf $PG(\mathbf{Z}_n)$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] G. Chartrand and P. Zhang, *A First Course in Graph Theory*. Dover Publications, 2012. [Online]. Available: https://books.google.co.id/books?id=ocIr0RHyI8oC

[2] M. S. Dra. Anggraini and M. S. Drs. Gandung Sugita, *Buku Ajar Struktur Aljabar*. Deepublish, 2020. [Online]. Available: https://books.google.co.id/books?id=ZdEOEAAAQBAJ

[3] E. R. Persulessy, H. M. Abdullah, and D. Nagaraju, "Ring Prima dan Ring Semiprima," *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, pp. 1–4, 2013.

[4] K. H. Rosen and K. Krithivasan, *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw-Hill, 2013. [Online]. Available: https://books.google.co.id/books?id=ZO8iMAEACAAJ

[5] D. B. Satyanarayana, K. Prasad, and D. Nagaraju, "Prime Graph of a Ring," *Journal of Combinatories, Informations & Systems Sciences*, vol. 35, pp. 27–42, Jan. 2010.