Jurnal Diferensial, Volume 04, Nomor 01, April 2022
E-ISSN: 2775-9644

ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI *BINOMIAL* NEGATIF MENGGUNAKAN METODE INFERENSI BAYESIAN

Laura E. Laidat[1*], Keristina Br Ginting[1], Ganesha Lapenangga Putra[1]

1. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana

*Penulis korespondensi: lauraerlindalaidat@gmail.com

ABSTRAK

Estimasi parameter merupakan salah satu bentuk dari statistik inferensial. Estimasi parameter terdiri atas estimasi parameter titik dan estimasi parameter *interval*. Pada penelitian ini akan dilakukan estimasi parameter titik dan *interval* dari distribusi *Binomial* Negatif dengan metode Bayes. Metode Bayes dalam penelitian ini memanfaatkan distribusi *Beta* selaku *prior* konjugat, distribusi *Uniform* selaku *prior non-*konjugat, dan metode *Jeffrey* selaku *prior non*-informatif. Untuk mengevaluasi penduga terbaik, metode yang digunkan ialah dengan melihat nilai yang terkecil dari varian *posterior* dan lebar *credible interval* bayes. Dalam studi simulasi menggunakan pemrograman R, diperoleh penduga terbaik ialah *prior* konjugat *Beta*, sebab memiliki nilai varian *posterior* yang terkecil dan lebar *credible interval* Bayes yang terkecil dibandingkan dengan *prior non*-konjugat *Uniform* dan *prior non*-informatif *Jeffrey*.

Kata Kunci: *Credible Interval Bayes*, Distribusi *Beta*, Distribusi *Binomial* Negatif, Distribusi *Uniform,* Metode Jeffrey.

1. PENDAHULUAN

Statistika merupakan salah satu ilmu dalam matematika yang secara khusus membahas mengenai cara-cara untuk dapat mengumpulkan, menganalisis, serta menginterpretasikan data hingga akhirnya dapat diambil suatu kesimpulan berdasarkan data yang terkumpul tersebut. Dalam statistika terdapat dua metode utama yang dapat digunakan yakni statistik deskriptif dan statistik inferensial. Statistika deskriptif merupakan suatu metode statistika yang menggambarkan dan menganalisis suatu penelitian namun tidak generalisasi. Sedangkan statistik inferensial merupakan metode statistik yang menganalisis suatu data dan kesimpulannya ditujukan secara generalisasi. Statistika Inferensial sendiri dibagi atas 2, yakni pendugaan (estimasi) parameter dan pengujian hipotesis [1].

Estimasi parameter terbagi atas estimasi parameter titik dan estimasi parameter *interval*. Untuk mengestimasi titik dari suatu parameter dapat dilakukan dengan metode klasik dan metode Bayes. Metode Bayes ialah metode yang memanfaatkan data sampel juga menggunakan distribusi awal atau distribusi *prior*. Distribusi *prior* merupakan distribusi subjektif yang didasarkan pada keyakinan sang peneliti [2].

Terdapat beberapa jenis distribusi *prior*, yakni *prior* konjugat, *prior non*-konjugat, dan *prior non*-informatif [3]–[5]. Dikatakan sebagai *prior* konjugat jika pola distribusi *prior* memiliki bentuk konjugat dengan fungsi densitas pembangun *likelihood*nya, dikatakan *prior non*-konjugat jika pemberian *prior* tidak mengindahkan pola pembentuk fungsi *likelihood*nya, serta dikatakan sebagai *prior non*-informatif jika distribusi *prior* tidak mengandung informasi parameter θ [3], [4].

Sebelumnya telah dilakukan penelitian oleh Musana, T.A. [6]. Pada penelitian ini penulis akan mengkaji lebih lanjut dalam mengenai estimasi parameter distribusi *Binomial* Negatif dengan *prior* konjugat *Beta*, *prior* non-konjugat *Uniform*, dan *prior* non-informatif *Jeffrey*. Serta, menentukan estimator terbaik dengan melihat nilai varians dan lebar *credible interval* yang terkecil melalui pengaplikasian pada *Program* R.

2. METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi literatur, yaitu mengkaji dan mempelajari berbagai sumber baik buku, skripsi, maupun berbagai jurnal yang berkaitan dengan metode Bayesian dalam mengestimasi parameter distribusi *Binomial* Negatif. Penelitian ini juga menggunakan studi simulasi dengan *Program R*.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Estimasi Titik untuk Parameter θ dari Distribusi *Binomial* Negatif dengan Metode Bayes

3.1.1 Fungsi Likelihood dari Distribusi *Binomial* Negatif

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan suatu peubah acak berdistribusi *Binomial* Negatif dengan parameter θ, fungsi kepekatan peluangnya adalah:

$$f(x;\theta) \quad = \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x+1)\Gamma(k)}\theta^k(1-\theta)^x \qquad 3.1$$

Sehingga, fungsi *likelihood*-nya dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$L(\theta) = f(x|\theta) = \frac{\theta^{kn}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\left(\Gamma(k)\right)^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma(x_i+k)}{\Gamma(x_i+1)} \qquad 3.2$$

3.1.2 Estimasi Parameter Titik Distribusi *Binomial* Negatif dengan *Prior* Konjugat *Beta*

Telah ditentukan pada 3.1 fkp distribusi *Binomial* Negatif dan pada 3.2 fungsi *likelihood*.

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ merupakan suatu peubah acak berdistribusi *Binomial* Negatif dengan parameter θ. Penentuan distribusi *posterior* ialah:

$$f(x,\theta) = \theta^{kn+\alpha-1}(1-\theta)^{\beta+\sum_{i=1}^{n} x_i - 1} \frac{1}{\left(\Gamma(k)\right)^n} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(x_i+k)}{\Gamma(x_i+1)}$$

Serta,

$$f(x) = \frac{1}{\left(\Gamma(k)\right)^n} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(x_i+k)}{\Gamma(x_i+1)} B\left(kn+\alpha, \beta + \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i\right)$$

Maka, distribusi *posterior*:

$$f(\theta|x) = \frac{f(x,\theta)}{f(x)} = \frac{\theta^{kn+\alpha-1}(1-\theta)^{\beta+\sum_{i=1}^{n} x_i - 1}}{Beta\left(kn+\alpha, \beta+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)} \qquad 3.3$$

Sehingga, distribusi *posterior* dengan *prior* konjugat *Beta* yang diperoleh merupakan distribusi $Beta(\alpha', \beta')$ dimana $\alpha' = kn + \alpha$ dan $\beta' = \beta + \sum_{i=1}^{n} x_i$

Selanjutnya, *mean* dan varians *posterior* untuk θ dari *prior* konjugat *Beta* adalah:

$$E(\theta_1) = \frac{kn+\alpha}{kn+\alpha+\beta+\sum_{i=1}^{n} x_i} \qquad 3.4$$

$$Var(\theta_1) = \frac{(kn+\alpha)(\beta+\sum_{i=1}^{n} x_i)}{\left(kn+\alpha+\beta+\sum_{i=1}^{n} x_i + 1\right)\left(kn+\alpha+\beta+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad 3.5$$

3.1.3 Estimasi Parameter Titik Distribusi *Binomial* Negatif dengan *Prior Non-*Konjugat *Uniform*

Dengan menggunakan distribusi *Uniform* $\theta \sim UNIF(0,1)$ sebagai *prior non-*konjugat serta fungsi *likelihood* dari distribusi *Binomial* Negatif pada persamaan 3.2, maka distribusi *posterior* dari θ dapat dinyatakan:

$$f(x,\theta) = \theta^{kn}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \frac{1}{\left(\Gamma(k)\right)^n} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(x_i+k)}{\Gamma(x_i+1)}$$

Serta,

$$f(x) = \frac{1}{\left(\Gamma(k)\right)^n} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(x_i+k)}{\Gamma(x_i+1)} Beta\left(kn+1, \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i + 1\right)$$

Maka, distribusi *posterior*:

$$f(\theta|x) = \frac{f(x,\theta)}{f(x)} = \frac{\theta^{kn+1-1}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i + 1 - 1}}{Beta\left(kn+1, \sum_{i=1}^{n} x_i + 1\right)} \qquad 3.6$$

Sehingga, distribusi *posterior* dengan *prior* konjugat *Beta* yang diperoleh merupakan distribusi $Beta(\alpha, \beta)$ dimana $\alpha = kn + 1$ dan $\beta = \sum_{i=1}^{n} x_i + 1$.

Selanjutnya, *mean* dan varians *posterior* untuk θ dari *prior non*-konjugat *Uniform* adalah:

$$E(\theta_2) \quad = \frac{kn+1}{kn+2+\sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{3.7}$$

$$Var(\theta_2) \quad = \frac{(kn+1)(\sum_{i=1}^{n} x_i + 1)}{\left(kn+3+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(kn+2+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{3.8}$$

3.1.4 Estimasi Parameter Titik Distribusi *Binomial* Negatif dengan *Prior Non-*Informatif

Untuk menduga parameter θ dengan pendekatan *prior non*-informatif salah satu metode yang dapat digunakan ialah metode *Jeffrey*. Tentukan dahulu Informasi *Fisher*:

$$\mathrm{I}(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial(\theta)^2}\log f(x;\theta)\right] = \frac{k}{\theta^2(1-\theta)}$$

Berdasarkan aturan *Jeffrey* maka diperoleh:

$$f\ (\theta) \propto \sqrt{\mathrm{I}(\theta)} \propto \frac{1}{\theta(1-\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

Selanjutnya, ditentukan distribusi *posterior* sebagai berikut:

$$f(x,\theta) \ = \theta^{kn-1}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - 1/2} \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(x_i+k)}{\Gamma(x_i+1)}}{\left(\Gamma(k)\right)^n}$$

Serta, $f(x) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(x_i+k)}{\Gamma(x_i+1)}}{\left(\Gamma(k)\right)^n}\ Beta\left(kn, \sum_{i=1}^{n} x_i + 1/2\right)$

Maka, distribusi *posterior*-nya dapat dirumuskan sebagai:

$$f(\theta|x) = \frac{f(x,\theta)}{f(x)} = \frac{\theta^{kn-1}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i + 1/2 - 1}}{Beta\left(kn, \sum_{i=1}^{n} x_i + 1/2\right)} \tag{3.9}$$

Sehingga, distribusi *posterior* dengan *prior non*-informatif yang diperoleh merupakan distribusi $Beta(\alpha,\beta)$ dengan $\alpha = kn$ dan $\beta = \sum_{i=1}^{n} x_i + 1/2$.

Selanjutnya, *mean* dan varians *posterior* untuk θ dari *prior non*-informatif *Jeffrey* ialah:

$$E(\theta_3) \ = \frac{kn}{kn\ + \sum_{i=1}^{n} x_i + 1/2} \tag{3.10}$$

$$Var(\theta_3) \quad = \frac{kn\ (\sum_{i=1}^{n} x_i + 1/2)}{(kn\ + \sum_{i=1}^{n} x_i + 3/2)(kn\ + \sum_{i=1}^{n} x_i + 1/2)^2} \tag{3.11}$$

3.2 Estimasi *Interval* dengan Menggunakan *Credible Interval* Bayes

Credible Interval Bayes dengan *mean* bagi penduga θ ialah $\hat{\theta}_{bayes}$ dan variansnya ialah $Var(\theta)$, serta simpangan baku dari penduga Bayesnya ialah $\sqrt{Var(\theta)} = \sigma_{bayes}$. Maka selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk θ dapat ditulis sebagai:

$$\hat{\theta}_{bayes} - z_{\alpha/2}\sigma_{1bayes} < \theta < \hat{\theta}_{bayes} + z_{\alpha/2}\sigma_{1bayes} \qquad 3.12$$

3.3 Studi Simulasi

Data bangkitan berdistribusi Binomial Negatif diperoleh pada program R sebanyak 100 data yaitu: 51, 102, 75, 53, 33, 36, 127, 28, 87, 70, 69, 64, 64, 61, 86, 58, 59, 54, 57, 22, 75, 80, 54, 35, 33, 107,35, 24, 66, 42, 94, 126, 62, 100, 64, 38, 95, 45, 86, 101, 73, 59, 112, 77, 116, 140, 61, 71, 88, 49, 49, 44, 111, 103, 44, 55, 127, 67, 53, 46, 83, 30,71, 36, 50,29, 51, 56, 29, 125, 70, 27, 55, 47, 57, 67, 87, 103,75, 15, 68, 115, 55,36, 73, 42, 83, 68, 68,104, 28,92, 65, 59, 21,32, 55, 35, 64, 36. Dari lampiran data maka diperoleh $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{100} x_i = 6545$.

3.3.1 Estimasi Parameter θ pada Distribusi *Binomial* Negatif dengan *Prior* Konjugat *Beta*

3.3.1.1 Estimasi Titik untuk Parameter θ

Berdasarkan 3.2, maka diperoleh nilai dari $\alpha = kn + 1 = 7(100) + 1 = 701$ dan nilai $\beta = \sum_{i=1}^{100} x_i + 1 = 6545 + 1 = 6546$. Selanjutnya, berdasarkan 3.3 distribusi *posterior* dengan *prior* konjugat *Beta* berdistribusi *Beta* dengan $\alpha' = kn + \alpha$ = 7(100) + 701 = 1401 dan $\beta' = \beta + \sum_{i=1}^{n} x_i$ = 6546 + 6545 = 13091. Maka berdasarkan 3.4 dan 3.5, nilai *mean* dan varians *posterior* dari *prior* konjugat *Beta* ialah:

$$\hat{\theta}_1 = 0.09667403 \text{ dan } Var(\theta_1) = 0.000006025541$$

Simpangan baku *posterior* ialah:

$$\sigma_{1bayes} = 0.002454698$$

3.3.1.2 Selang Kepercayaan untuk Parameter θ

Berdasarkan persamaaan 3.12, *credible interval* Bayes dari distribusi *posterior* θ_1 ialah:

$$0.09186282 < \theta_1 < 0.10148524$$

3.3.2 Estimasi Parameter θ pada Distribusi *Binomial* Negatif dengan *Prior Non*-Konjugat *Uniform*

3.3.2.1 Estimasi Titik untuk Parameter θ

Berdasarkan distribusi *posterior* pada 3.6, maka nilai dari $\alpha = kn + 1 = 7(100) + 1 = 701$ dan nilai $\beta = \sum_{i=1}^{100} x_i + 1 = 6545 + 1 = 6546$. Sehingga, berdasarkan 3.7 dan 3.8, nilai *mean* dan varians *posterior* dari *prior non*-konjugat *Uniform* ialah:

$$\hat{\theta}_2 = 0.09672968 \text{ dan } Var(\theta_2) = 0.00001205478$$

Simpangan baku *posterior* ialah:

$$\sigma_{2bayes} = 0.003471999$$

3.3.2.2 Selang Kepercayaan untuk Parameter θ

Berdasarkan persamaaan 3.12, *credible interval* Bayes dari distribusi *posterior* θ_2 ialah: $0.08992456 < \theta_2 < 0.1035348$

3.3.3 Estimasi Parameter θ pada Distribusi *Binomial* Negatif dengan *Prior Non-*Informatif

3.3.3.1 Estimasi Titik untuk Parameter θ

Pada persamaan 3.9 diperoleh bahwa distribusi *posterior* dengan *prior non-*informatif berdistribusi *Beta* dengan nilai dari $\alpha = kn = 7(100) = 700$ dan nilai $\beta = \sum_{i=1}^{100} x_i + {}^1/_2 = 6545 + 0.5 = 6545.5$. Sehingga berdasarkan 3.10 dan 3.11, nilai *mean* dan varians *posterior* dari *prior non-* informatif *Jeffrey* ialah:

$$\hat{\theta}_3 = 0.09661169 \text{ dan } Var(\theta_3) = 0.00001204414$$

Simpangan baku *posterior* ialah:

$$\sigma_{3bayes} = 0.003470467$$

3.3.3.2 Selang Kepercayaan untuk Parameter θ

Berdasarkan persamaaan 3.12, *credible interval* Bayes dari distribusi *posterior* θ_3 ialah:

$$0.08980958 < \theta_3 < 0.10341381$$

Lakukan langkah perhitungan yang sama dengan $n = 100$ dan $k = 7$, untuk $\theta = 0.2, \theta = 0.3, \theta = 0.4, \theta = 0.5, \theta = 0.6, \theta = 0.7, \theta = 0.8,$ dan $\theta = 0.9$.

Hasil simulasi menggunakan *Program R* disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1. Hasil Perhitungan Estimasi Titik untuk parameter θ dari Distribusi *Binomial* Negatif

Peluang (θ)	**Distribusi *Prior***	***Posterior Mean* ($\hat{\theta}$)**	***Posterior Varians***
0.1	*Beta*	0.09667403	0.000006025541
	Uniform	0.09672968	0.00001205478
	Jeffrey	0.09661169	0.00001204414
0.2	*Beta*	0.20922939	0.00002470546
	Uniform	0.20931621	0.00004940386
	Jeffrey	0.20911128	0.0000493904
0.3	*Beta*	0.30576168	0.00004631714
	Uniform	0.30584642	0.00009258805
	Jeffrey	0.30561013	0.00009260859
0.4	*Beta*	0.3964346	0.00006768719
	Uniform	0.3964932	0.0001352664
	Jeffrey	0.3962638	0.0001353543
0.5	*Beta*	0.5286792	0.00009399378
	Uniform	0.5286576	0.000187776
	Jeffrey	0.5285013	0.0001879952
	Beta	0.6128609	0.000103744

0.6	*Uniform*	0.6127622	0.0002072355
	Jeffrey	0.6126915	0.0002075213
0.7	*Beta*	0.6867647	0.0001053988
	Uniform	0.6865818	0.000210555
	Jeffrey	0.6866111	0.0002108538
0.8	*Beta*	0.7723264	0.00009688064
	Uniform	0.7720264	0.0001936211
	Jeffrey	0.7722008	0.0001938366
0.9	*Beta*	0.9050388	0.00005548328
	Uniform	0.9045161	0.0001112973
	Jeffrey	0.9049774	0.0001110308

Berdasarkan hasil perhitungan estimasi titik pada Tabel 3.1., maka diketahui bahwa untuk $n = 100$, distribusi *prior Beta* dengan $\theta = 0.1$ sampai dengan $\theta = 0.9$ menghasilkan nilai *posterior mean* yang mendekati nilai yang ditetapkan. Serta, nilai varians *posterior* yang terkecil dibandingkan nilai varians *posterior* pada prior lainnya.

Tabel 3.2 Hasil Perhitungan *Credible Interval* Bayes, Lebar *Credible Interval* Bayes Pendugaan Parameter Distribusi *Binomial* Negatif

Peluang (θ)	**Distribusi *Prior***	***Credible Interval* Bayes**	**Lebar *Credible Interval* Bayes**
0.1	*Beta*	$0.09186282 < \theta < 0.10148524$	0.00962242
	Uniform	$0.08992456 < \theta < 0.1035348$	0.01361024
	Jeffrey	$0.08980957 < \theta < 0.10341381$	0.01360423
0.2	*Beta*	$0.19948729 < \theta < 0.21897149$	0.0194842
	Uniform	$0.19553979 < \theta < 0.22309264$	0.02755285
	Jeffrey	$0.19533673 < \theta < 0.22288582$	0.02754909
0.3	*Beta*	$0.29242256 < \theta < 0.31910079$	0.02667823
	Uniform	$0.28698678 < \theta < 0.32470607$	0.03771929
	Jeffrey	$0.28674839 < \theta < 0.32447187$	0.03772348
0.4	*Beta*	$0.38030928 < \theta < 0.41255999$	0.03225071
	Uniform	$0.37369761 < \theta < 0.41928882$	0.04559121
	Jeffrey	$0.37346079 < \theta < 0.41906681$	0.04560602
0.5	*Beta*	$0.50967697 < \theta < 0.54768152$	0.03800455
	Uniform	$0.50179947 < \theta < 0.55551577$	0.0537163
	Jeffrey	$0.5016275 < \theta < 0.55537515$	0.05374765
0.6	*Beta*	$0.59289736 < \theta < 0.63282443$	0.03992707
	Uniform	$0.58454671 < \theta < 0.64097777$	0.05643106
	Jeffrey	$0.58445649 < \theta < 0.64092644$	0.05646995
0.7	*Beta*	$0.66664257 < \theta < 0.70688683$	0.04024426
	Uniform	$0.65814117 < \theta < 0.71502239$	0.05688122
	Jeffrey	$0.6581503 < \theta < 0.71507186$	0.05692156
	Beta	$0.75303447 < \theta < 0.79161823$	0.03858376

0.8	*Uniform*	$0.74475346 < \theta < 0.7992994$	0.05454594
	Jeffrey	$0.74491263 < \theta < 0.79948892$	0.05457629
0.9	*Beta*	$0.89043929 < \theta < 0.91963823$	0.02919894
	Uniform	$0.88383861 < \theta < 0.92519364$	0.04135503
	Jeffrey	$0.88432463 < \theta < 0.92563012$	0.04130549

Dari Tabel 3. 2 diperoleh bahwa pada $n = 100$, dengan $\theta = 0.1$ sampai dengan $\theta = 0.9$ hasil perhitungan *Credible Interval* Bayes untuk distribusi *prior Beta* menghasilkan lebar *Credible Interval* Bayes yang lebih kecil dibandingkan dengan lebar *interval* pada *prior Uniform* dan *prior Jeffrey*.

4. SIMPULAN

1. *Mean* dan varians *posterior* dari *prior* konjugat *Beta*:

$$E(\theta_1) = \frac{kn+\alpha}{kn+\alpha+\beta+\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$Var(\theta_1) = \frac{(kn+\alpha)(\beta+\sum_{i=1}^{n} x_i)}{\left(kn+\alpha+\beta+\sum_{i=1}^{n} x_i+1\right)\left(kn+\alpha+\beta+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

2. *Mean* dan varians *posterior* dari *prior non*-konjugat *Uniform*:

$$E(\theta_2) = \frac{kn+1}{kn+2+\sum_{i=1}^{n} x_i} \text{ dan } Var(\theta_2) = \frac{(kn+1)(\sum_{i=1}^{n} x_i+1)}{\left(kn+3+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(kn+2+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

3. *Mean* dan varians *posterior* dari *prior non*-informatif *Jeffrey*:

$$E(\theta_3) = \frac{kn}{kn+\sum_{i=1}^{n} x_i+{}^1/_2} \text{ dan } Var(\theta_3)$$

$$= \frac{kn\left(\sum_{i=1}^{n} x_i+{}^1/_2\right)}{\left(kn+\sum_{i=1}^{n} x_i+{}^3/_2\right)\left(kn+\sum_{i=1}^{n} x_i+{}^1/_2\right)^2}$$

4. Berdasarkan studi simulasi, diketahui distribusi *Beta* merupakan distribusi *prior* konjugat terbaik karena memiliki nilai pendugaan titik yang mendekati nilai yang ditetapkan, memiliki nilai varians terkecil, serta nilai *Credible Interval* Bayes yang terkecil bila dibandingkan dengan distribusi *prior* lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] M. P. M. T. Dr. Eng. Yeri Sutopo, M. S. Prof. Dr. Achmad Slamet, and A. Offset, *Statistik Inferensial*. Penerbit Andi. [Online]. Available: https://books.google.co.id/books?id=jVJLDwAAQBAJ

[2] R. E. Walpole, R. H. Myers, S. L. Myers, and K. Ye, *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. Pearson, 2017. [Online]. Available: https://books.google.co.id/books?id=aOKHrgEACAAJ

[3] W. M. Bolstad and J. M. Curran, *Introduction to Bayesian Statistics*. Wiley, 2016. [Online]. Available: https://books.google.co.id/books?id=UeT3DAAAQBAJ

[4] G. E. P. Box and G. C. Tiao, *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Wiley, 2011. [Online]. Available: https://books.google.co.id/books?id=T8Askeyk1k4C

[5] L. Held and D. S. Bové, *Likelihood and Bayesian Inference: With Applications in Biology and Medicine*. Springer Berlin Heidelberg, 2020. [Online]. Available: https://books.google.co.id/books?id=pb-YywEACAAJ

[6] A. T. Musana, F. Yanuar, and Y. Asdi, “Identifikasi Distribusi Jumlah Kecelakaan Lalu Lintas Di Depok Dan Pendugaan Parameternya Menggunakan Metode Bayes,” *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 8, no. 4, pp. 1–7, 2019.