

ARTIKEL PENELITIAN

Pelabelan W_n -Ajaib Super pada Graf $P_m \supseteq_e W_n$

Ci Manu¹, Ganesha L. Putra^{1,*}, Keristina Br. Ginting¹

¹Program Studi Matematika, Universitas Nusa Cendana, Kupang-NTT, Indonesia

*Penulis korespondensi: ganesha.lapenangga@staf.undana.ac.id

Diterima: 24 Februari 2023; Direvisi: 25 April 2023; Disetujui: 26 April 2023; Dipublikasi:28 April 2023.

Abstrak:

Misalkan G suatu graf, H sebagai subgraf dari G , maka graf G yang memuat selimut- H dikatakan memiliki pelabelan H -ajaib jika terdapat suatu fungsi bijektif f memetakan $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan asli yang tidak lebih dari $|V(G)| + |E(G)|$ sehingga untuk sebarang \bar{H} subgraf dari G yang isomorfik dengan H berlaku jumlahan label titik dan sisi dari \bar{H} sama dengan k yang dikenal sebagai bilangan ajaib. Selanjutnya, dikatakan H -ajaib super jika peta dari himpunan titik pada G merupakan himpunan bilangan asli yang tak lebih dari $|V(G)|$. Misalkan e suatu sisi pada graf W_n . Graf $P_m \supseteq_e W_n$ merupakan graf yang diperoleh dari satu salinan graf P_m dan $|E(P_m)|$ salinan dari graf W_n , lalu tempelkan sisi ke- i pada graf P_m dengan sisi e pada salinan ke- i dari graf W_n . Pada jurnal ini, dikonstruksi pelabelan W_n -ajaib super pada graf $P_m \supseteq_e W_n$.

Kata Kunci: Graf $P_m \supseteq_e W_n$, pelabelan H -ajaib super, multi-himpunan seimbang

Abstract: Suppose G graph, H subgraph of G , then graph G admits H -covering having an H -magic labeling if there exist a bijective function mapping $V(G) \cup E(G)$ to a set of natural number at most $|V(G)| + |E(G)|$ such that for any subgraph \bar{H} of G isomorphic to H , the sum of vertex and edge label of \bar{H} is equal to a fix number k , where k is a magic number. Moreover, such a labeling called H -super magic if the range of vertex set of G is a set positive integer less than or equal to $|V(G)|$. Suppose that e is an edge of W_n . Graph $P_m \supseteq_e W_n$ is a graph obtained by taking a copy of graph P_m , $|E(P_m)|$ copies of W_n , then identifying i -th edge of P_m to an edge e at i -th copy of W_n . In this paper, we construct the W_n -supermagic labeling of $P_m \supseteq_e W_n$.

Keywords: $P_m \supseteq_e W_n$ graph, H -supermagic labeling, balanced multi-set

1. Pendahuluan

Pengenalan teori graf yang dicetuskan oleh Leonhard Euler kemudian melahirkan teori-teori yang memiliki penerapan pada berbagai bidang ilmu [1]. Seiring berjalannya waktu, teori graf dapat diaplikasikan pada suatu pengaitan antara titik atau sisi ke suatu bilangan yang dikenal dengan pelabelan graf. Himpunan daerah asal pada suatu pelabelan menentukan kategori dari pelabelan tersebut yang dibagi menjadi pelabelan titik, pelabelan sisi, atau pelabelan total [2]. Graf G terdiri dari himpunan tak kosong titik-titik yang dinamakan $V(G)$ dan $E(G)$ yang dikenal sebagai himpunan sisi dengan $E(G) \subseteq [V(G)]^2$ [3]. Misalkan G dan H graf dan e sisi di H . Hasil kali sisir

sisi antara graf G dan graf H , dinotasikan dengan $G \succeq_e H$, merupakan graf yang dibentuk dari satu salinan graf G , $|E(G)|$ salinan graf H , kemudian dikaitkan sisi ke- i dari graf G pada sisi e dari salinan ke- i graf H [4, 5].

Selanjutnya, suatu selimut- H pada graf G dengan H subgraf dari G merupakan suatu kondisi dengan setiap sisi e pada G merupakan sisi pada subgraf G yang isomorfik dengan H . Graf G dengan kondisi demikian dikatakan memiliki pelabelan H -ajaib jika terdapat suatu fungsi bijektif f yang memetakan himpunan titik dan sisi di G ke himpunan bilangan asli yang tidak lebih dari $|V(G)| + |E(G)|$ sehingga untuk sebarang \bar{H} subgraf dari G yang isomorfik dengan H berlaku jumlahan label titik dan sisi dari \bar{H} sama dengan bilangan konstan k yang dikenal sebagai bilangan ajaib. Selanjutnya, dikatakan H -ajaib super jika himpunan daerah hasil dari $V(G)$ merupakan himpunan bilangan asli yang tak lebih dari $|V(G)|$. Jika graf G memiliki pelabelan H -ajaib (super), maka dikatakan graf G merupakan graf H -ajaib (super) [6].

Gita Naftali Adriyani Ginting membuktikan bahwa graf $C_m \triangleright C_n$ merupakan graf $P_2 \triangleright C_n$ -ajaib super untuk m ganjil [7]. Putra memberikan hasil dari pelabelan $P_2 \succeq G$ -ajaib super pada beberapa graf hasil kali sisir dengan graf G , yakni $C_m \succeq G$ dan $P_m \succeq G$ [8]. Selanjutnya, Putra, Aryanto, dan Ndi juga memberikan hasil lanjutan dari Pelabelan H -ajaib super pada graf hasil kali sisir [9]. Ngurah dkk. juga memberikan hasil terkait pelabelan C_3 dan C_4 - ajaib super pada graf seperti graf buku, $P_n \times P_2$, $P_n + K_1$, TL_n , dan $P_m \times P_n$ [10]. Pada tahun 2013, Roswitha dkk. membuktikan bahwa graf Jahangir yang diperumum, graf roda W_n , n genap, dan graf bipartit lengkap $K_{2,n}$ secara berturut-turut merupakan graf siklus-ajaib super [11]. Gutiérrez dkk. memberikan pelabelan bintang-ajaib super pada graf bipartit lengkap serta pelabelan P_i -ajaib super pada graf lintasan P_n dan siklus C_n untuk $i \leq n$ [6]. Lladó dkk. memberikan konstruksi pelabelan C_3 -ajaib super pada graf W_n untuk $n \geq 3$, n ganjil [12].

2. Multi-himpunan k -Seimbang

Multi-himpunan yang dikenalkan oleh Maryati dkk. [13] merupakan suatu struktur-serupa himpunan yang memiliki aturan bahwa objek yang sama dapat muncul berulang kali. Diberikan X multi-himpunan dan k bilangan bulat positif. Multi-himpunan X dikatakan k -seimbang jika terdapat k himpunan bagian dari X , namakan X_1, X_2, \dots, X_k , sehingga ketiga sifat berikut berlaku, yakni untuk setiap $j \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$, $\frac{\sum X}{k} = \sum X_j \in \mathbb{N}$, $|X_j| = \frac{|X|}{k} \in \mathbb{N}$, dan $\biguplus_{j=1}^k X_j = X$ [13]. Berikut diberikan Lema terkait multi-himpunan k -seimbang.

Lema 2.1. Diberikan m, n suatu bilangan asli dengan $m \geq 2$, $n \geq 3$, dan n ganjil maka multi-himpunan $X = [1, 3nm - 3n + 1] \uplus [2, m - 1]$ merupakan multi-himpunan $m - 1$ seimbang.

Bukti. Bentuk $X_j = \{a_j, a_{j+1}, b_{j,1}, b_{j,2}, \dots, b_{j,n-1}, c_{j,1}, c_{j,2}, \dots, c_{j,2n-1}, d_j\}$ untuk $j \in [1, m - 1]$ dengan

$$\begin{aligned} a_i &= i, i \in [1, m] \\ b_{j,k} &= \begin{cases} (k+1)(m-1) - j + 2; j \in [1, m-1], k \in [1, n-1], k \text{ ganjil} \\ m + (k-1)(m-1) + j; j \in [1, m-1], k \in [1, n-1], k \text{ genap} \end{cases} \\ c_{j,l} &= \begin{cases} (n+l)(m-1) - j + 2; j \in [1, m-1], l \in [1, 2n-1], l \text{ ganjil} \\ (m-1)(n+l-1) + j + 1; j \in [1, m-1], l \in [1, 2n-1], l \text{ genap} \end{cases} \\ d_j &= (m-1)(3n) - j + 2; j \in [1, m-1] \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $|X_j| = 3n + 1$ dan

$$\begin{aligned} \sum X_j &= a_j + a_{j+1} + b_{j,1} + b_{j,2} + \dots + b_{j,n-1} + c_{j,1} + c_{j,2} + \dots + c_{j,2n-1} + d_j \\ &= \frac{9n^2m - 9n^2 + 9n + m}{2}. \end{aligned}$$

Perhatikan juga bahwa

$$\begin{aligned}\Sigma X &= \frac{1}{2}(3nm - 3n + 1)(1 + 3nm - 3n + 1) + \frac{1}{2}(m - 2)(2 + m - 1) \\ \frac{\Sigma X}{m - 1} &= \frac{9n^2m^2 - 18n^2m + 9n^2 + 9nm - 9n + m^2 - m}{2(m - 1)} \\ &= \frac{9n^2m - 9n^2 + 9n + m}{2} \\ &= \Sigma X_j \\ |X| &= 3nm - 3n + m - 1 \\ \frac{|X|}{(m - 1)} &= \frac{3nm - 3n + m - 1}{(m - 1)} \\ &= 3n + 1 \\ &= |X_j|.\end{aligned}$$

dan $\biguplus_{j=1}^{m-1} X_j = [1, 3nm - 3n + 1] \biguplus [2, m - 1] = X$. Jadi, terbukti bahwa X adalah multi-himpunan $m - 1$ -seimbang. \square

Lema 2.2. Untuk suatu bilangan bulat positif m, n dengan $m \geq 2, n \geq 3, n$ genap, m genap maka multi-himpunan $X = [1, 3nm - 3n + 1] \biguplus [2, m - 1]$ merupakan multi-himpunan $m - 1$ seimbang.

Bukti. Bentuk $X_j, b_{j,k}, c_{j,l}$ sama dengan Lema 2.1 dan

$$\begin{aligned}a_i &= \begin{cases} \frac{i+1}{2}; i \in [1, m], i \text{ ganjil} \\ \lceil \frac{m}{2} \rceil + \frac{i}{2}; i \in [1, m], i \text{ genap.} \end{cases} \\ d_j &= m + (3n - 2)(m - 1) + j; j \in [1, m - 1]\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama pada Lema 2.1, diperoleh $\Sigma X_j = \frac{\Sigma X}{m-1} = \frac{9n^2m - 9n^2 + 9n + m}{2}, |X_j| = \frac{|X|}{m-1} = 3n + 1$, dan $\biguplus_{j=1}^{m-1} X_j = X$. Jadi, terbukti bahwa X merupakan multi-himpunan $m - 1$ -seimbang. \square

Lema 2.3. Multi-himpunan $X = [1, 3nm - 3n + 1] \biguplus [2, \frac{m-1}{2}] \biguplus [\frac{m+3}{2}, m]$ merupakan multi-himpunan $m - 1$ seimbang untuk bilangan bulat positif $m \geq 2, n \geq 3, n$ genap, dan m ganjil.

Bukti. Bentuk $X_j, a_i, b_{j,k}, c_{j,l}, d_j$ seperti pada Lema 2.2. Selanjutnya, perhatikan bahwa $|X_j| = 3n + 1$

$$\begin{aligned}\Sigma X_j &= a_j + a_{j+1} + b_{j,1} + b_{j,2} + \cdots + b_{j,n-1} + c_{j,1} + e_{j,2} + \cdots \\ &\quad + f(e_{j,2n-1}) + f(e_j). \\ &= \frac{9n^2m - 9n^2 + 9n + m + 1}{2}.\end{aligned}$$

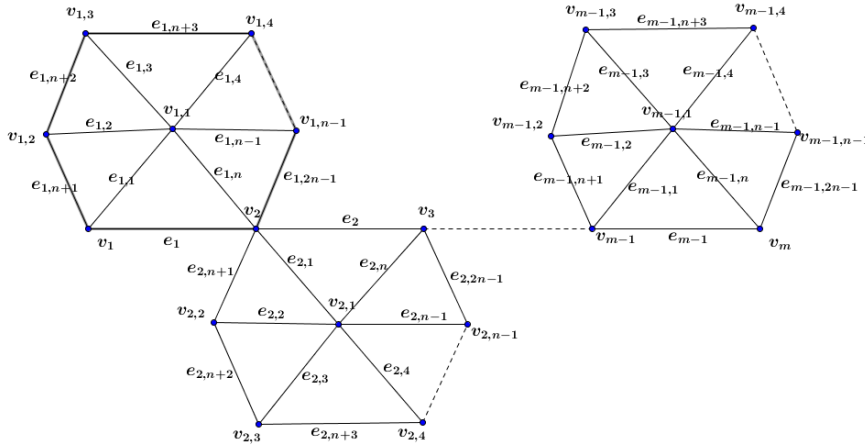
Perhatikan juga bahwa

$$\begin{aligned}\Sigma X &= \frac{1}{2}(3nm - 3n + 1)[3nm - 3n + 2] + \frac{1}{2}(m - 1)(2 + m) - \frac{(m + 1)}{2} \\ \frac{\Sigma X}{m - 1} &= \frac{9n^2m^2 - 18n^2m + 9n^2 + 9nm - 9n + m^2 - 1}{2(m - 1)} \\ &= \frac{9n^2m - 9n^2 + 9n + m + 1}{2} \\ &= \Sigma X_j \\ \frac{|X|}{m - 1} &= \frac{3nm - 3n + m - 1}{m - 1} \\ &= 3n + 1 \\ &= |X_j|\end{aligned}$$

dan juga $\bigsqcup_{j=1}^{m-1} X_j = [1, 3nm - 3n + 1] \bigsqcup [2, \frac{m-1}{2}] \bigsqcup [\frac{m+3}{2}, m] = X$. Jadi, diperoleh X multi-himpunan $m - 1$ -seimbang. \square

3. Hasil Utama

Sebelum masuk pada hasil utama, berikut diberikan himpunan titik dan sisi dari graf $P_m \supseteq_e W_n$ pada gambar berikut. Perhatikan bahwa $|V(P_m \supseteq_e W_n)| = nm - n + 1$ dan $|E(P_m \supseteq_e W_n)| = 2nm - 2n$.



Gambar 3.1: Graf $P_m \supseteq_e W_n$

Berikut diberikan teorema untuk membuktikan graf $P_m \supseteq_e W_n$ suatu graf W_n -ajaib super.

Teorema 3.1. *Graf $P_m \supseteq_e W_n$ merupakan graf W_n -ajaib super untuk bilangan bulat positif m, n dengan $m \geq 2, n \geq 3$.*

Bukti. Bukti teorema ini terbagi menjadi tiga kasus, yaitu untuk (1). n ganjil; (2). n genap dan m genap; (3). n genap dan m ganjil.

Kasus 1. n ganjil.

Definisikan fungsi pelabelan titik dan sisi pada graf $P_m \supseteq_e W_n$ sebagai berikut. Untuk $f : V(P_m \supseteq_e W_n) \cup E(P_m \supseteq_e W_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 3nm - 3n + 1\}$, bentuk $f(v_i) = a_i, f(v_{j,k}) = b_{j,k}, f(e_{j,l}) = c_{j,l}$ dan $f(e_j) = d_j$ dengan $a_i, b_{j,k}, c_{j,l}, d_j$ seperti pada Lema 2.1. Kemudian, perhatikan bahwa X_j merupakan himpunan label titik dan sisi dari salinan ke- j pada graf W_n dengan $j \in [1, m - 1]$. Kardinalitas dari kemungkinan nilai indeks j bernilai sama dengan banyaknya subgraf W_n pada graf $P_m \supseteq_e W_n$, yakni $m - 1$. Pada Lema 2.1 juga telah dibuktikan bahwa ΣX_j memiliki nilai yang tidak bergantung pada j , yakni

$$\Sigma X_j = \frac{9n^2m - 9n^2 + 9n + m}{2}$$

Akibatnya, jika diambil sebarang subgraf W_n pada graf $P_m \supseteq_e W_n$, jumlahan atas label titik-titik dan sisi-sisinya selalu sama. Setelah itu, dibuktikan $f : V(P_m \supseteq_e W_n) \cup E(P_m \supseteq_e W_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 3nm - 3n + 1\}$ merupakan fungsi bijektif. Perhatikanlah label titik dan label sisi pada graf $P_m \supseteq_e W_n$. Berikut diberikan peta f untuk setiap fungsi partisinya sebagai berikut. $\{f(v_i) | i \in [1, m]\} = [1, m], \{f(v_{j,k}) | j \in [1, m - 1], k \in [1, n - 1]\} = [m + 1, n(m - 1) + 1]; \{f(e_{j,l}) | j \in [1, m - 1], l \in [1, 2n - 1]\} = [n(m - 1) + 2, (3n - 1)(m - 1) + 1], \{f(e_j) | j \in [1, m - 1]\} = [(3n - 1)(m - 1) + 2, 3nm - 3n + 1]$ Berdasarkan penjabaran di atas, diketahui bahawa $R(f) = [1, 3nm - 3n + 1] = \{1, 2, 3, \dots, |V(P_m \supseteq_e W_n)| + |E(P_m \supseteq_e W_n)|\}$. Akibatnya, f fungsi pada. Lebih lanjut, karena $|D(f)| = |R(f)| = 3nm - 3n + 1$,

maka f fungsi satu-satu. Jadi, f fungsi bijektif. Untuk syarat super, dibuktikan $f(V(P_m \supseteq_e W_n)) = \{1, 2, \dots, nm - n + 1\}$. Perhatikan label titik pada graf $P_m \supseteq_e W_n$.

$$\begin{aligned} f(V(P_m \supseteq_e W_n)) &= \{f(v_i), i \in [1, m]\} \cup \{f(v_{j,k} | j \in [1, m-1], k \in [1, n-1])\} \\ &= [1, m] \cup [m+1, n(m-1)+1] \\ &= [1, n(m-1)+1] \\ &= \{1, 2, \dots, nm - n + 1\} \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh bahwa untuk n ganjil, graf $P_m \supseteq_e W_n$ merupakan graf W_n -ajaib super.

Kasus 2. n genap dan m genap

Untuk kasus ini, kita gunakan cara yang sama dengan Kasus 1 dengan fungsi pelabelan titik dan sisi diambil dari Lema 2.2. Jadi, diperoleh bahwa untuk n genap dan m genap, graf $P_m \supseteq_e W_n$ merupakan graf W_n -ajaib super dengan bilangan ajaib yang sama dengan Kasus 1.

Kasus 3 : n genap dan m ganjil

Pada Kasus 3, buktinya juga serupa dengan kasus sebelumnya. Untuk fungsi pelabelan, digunakan Lema 2.3 dan diperoleh bilangan ajaibnya adalah $\Sigma X_j = \frac{9n^2m - 9n^2 + 9n + m + 1}{2}$. Bilangan ajaibnya berbeda dengan kedua kasus sebelumnya. Pembuktian fungsi bijektif dan ajaib super serupa dengan kasus sebelumnya.

Jadi, ketiga penjabaran kasus di atas membawa kepada hasil bahwa graf $P_m \supseteq_e C_n$ merupakan graf W_n -ajaib super. \square

4. Kesimpulan

Graf $P_m \supseteq_e W_n$ merupakan graf W_n -ajaib super untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$. Penulisan ini dapat dilanjutkan dengan mengganti graf W_n pada graf $P_m \supseteq_e W_n$ dengan graf lainnya.

Referensi

- [1] G. Chartrand and P. Zhang, *A first course in graph theory*. Courier Corporation, 2013. [View online](#).
- [2] J. A. Gallian, "A dynamic survey of graph labeling," *Electronic Journal of combinatorics*, vol. 1, no. DynamicSurveys, p. DS6, 2018. [View online](#).
- [3] R. Diestel, *Graph Theory*, vol. 173. Springer Berlin Heidelberg, 5 ed., 2017. [View online](#).
- [4] S. S. Sarasvati, I. Halikin, and K. Wijaya, "On odd harmonious labeling of $p_n \supseteq c_4$ and $p_n \supseteq d_2(c_4)$," *Indonesian Journal of Combinatorics*, vol. 5, no. 2, pp. 94–101, 2021. [View online](#).
- [5] M. Bača, A. Salman, R. Simanjuntak, and B. H. Susanti, "Rainbow 2-connectivity of edge-comb product of a cycle and a hamiltonian graph," *Proceedings-Mathematical Sciences*, vol. 130, pp. 1–12, 2020. [View online](#).
- [6] A. Gutiérrez and A. Lladó, "Magic coverings," *The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, vol. 55, pp. 43–56, 2005. [View online](#).
- [7] G. N. Ginting, J. R. Pahnuel, and G. L. Putra, "Pelabelan $p_2 \supset c_n$ ajaib super dari graf $c_m \supset c_n$," *Jurnal Diferensial*, vol. 2, no. 02, pp. 180–187, 2020. [View online](#).
- [8] G. L. Putra, "The $p_2 \supset_o g$ supermagic labeling of comb product of graphs," *Tensor: Pure and Applied Mathematics Journal*, vol. 2, no. 1, pp. 13–18, 2021. [View online](#).
- [9] G. L. Putra, Ariyanto, and M. Z. Ndi, "Further result of h-supermagic labeling for comb product of graphs," in *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)*, pp. 32–34, Atlantis Press, 2022. [View online](#).
- [10] A. Ngurah, A. Salman, and L. Susilowati, "H-supermagic labelings of graphs," *Discrete Mathematics*, vol. 310, no. 8, pp. 1293–1300, 2010. [View online](#).

- [11] M. Roswitha, E. T. Baskoro, T. K. Maryati, N. A. Kurdhi, and I. Susanti, "Further results on cycle-supermagic labeling," *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, vol. 10, no. 2, pp. 211–220, 2013. [View online](#).
- [12] A. Lladó and J. Moragas, "Cycle-magic graphs," *Discrete Mathematics*, vol. 307, no. 23, pp. 2925–2933, 2007. [View online](#).
- [13] T. Maryati, A. Salman, E. Baskoro, J. Ryan, and M. Miller, "On h -supermagic labelings for certain shackles and amalgamations of a connected graph," *Utilitas Mathematica*, vol. 83, p. 333, 2010. [View online](#).

Format Sitasi IEEE:

C. Manu, G.L. Putra, and K. Br. Ginting, "Pelabelan W_n -Ajaib Super pada Graf $P_m \supseteq_e W_n$ ", *Jurnal Diferensial*, vol. 5(1), pp. 29-34, 2023.

This work is licensed under a [Creative Commons "Attribution-ShareAlike 4.0 International"](#) license.

