DUAL-α , DUAL-β DAN DUAL-γ DARI RUANG BARISAN cs

Albert Kumanereng[1], Ariyanto[2], Rapmaida[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknik Universitas Nusa Cendana

ABSTRACT

This research discussed about The Sequence Space cs. The sequence space cs is a set of all convergent series. A series is said to convergent if the partial sums of the series is convergent. A sequence x_n is said to convergent if for n came near to infinity, the terms of the sequence came near to a value.The method in this research is literature review.The results are: dual-α of cs is ℓ_1, dual-β of cs is bv, dual-γ of cs is bv and cs is β -perfect sequence space.

Keywords: *Convergen Series, Banach Space, Sequence space cs, Dual-α, Dual-β, Dual-γ*

PENDAHULUAN

Matematika analisis merupakan salah satu cabang dalam matematika. Matematika analisis terbagi menjadi analisis klasik dan analisis modern. Analisis klasik mempelajari konsep-konsep yang berhubungan dengan sistem bilangan, sedangkan analisis modern merupakan pengembangan dari analisis klasik yang mulai bekerja pada ruang (abstrak). Salah satu topik yang dipelajari dalam analisis klasikadalah barisan.

Barisan merupakan suatu pemetaan dengan domain bilangan asli dan range bilangan real atau bilangan kompleks.Bila rangenya bilangan real, barisan itu disebut barisan bilangan real dan bila rangenya bilangan kompleks, maka barisan itu disebut barisan bilangan kompleks.Suatu barisan $\{x_n\}$ dikatakan konvergen jika untuk n yang semakin besar, suku-sukunya menuju ke suatu nilai tertentu yang disebut limit dari barisan itu. Nilai kekonvergenan dari suatu barisan tidak akan berubah bila suku-suku dari barisan itu dikurangi atau ditambah dengan bilangan yang hingga.

Konsep tentang deret tak lepas dari konsep tentang barisan. Deret merupakan jumlahan dari unsur-unsur atau suku-suku dari suatu barisan. Suatu deret$\sum x_n$ dikatakan konvergen jika untuk n yang semakin besar, jumlah dari suku-suku$\{x_n\}$ pada barisannya menuju kesuatu nilai tertentu yang disebut limit dari deret itu. Sama halnya dengan barisan, kekonvergenan dari suatu deret tidak akan berubah bila suku-suku dari deret tersebut dikurangi atau ditambah.

Misalkan S merupakan himpunan semua barisan bilangan real atau barisan bilangan kompleks. Himpunan semua deret - deret yang konvergen dari barisan dalam Sakan membentuk suatu ruang vektor yang disebut Ruang Barisan cs. Ruang barisan sendiri merupakan ruang vektor yang anggota-anggotanya adalah barisan tak-hingga dari bilangan real atau bilangan kompleks yang memenuhi aturan-aturan tertentu.

Topik lain yang dipelajari dalam analisis modern adalah ruang dual. Ruang dual merupakan himpunan semua fungsional linear terbatas yang memetakan dari suatu ruang bernorma X ke kodomain R.

Dalam makalahnya yang berjudul "*Zeller Theory and Classical Sequence Spaces*" yang dipresentasikan pada tahun 1989 , Lee Peng Yee memperkenalkan Ruang Dual α, Ruang Dual β dan Ruang Dual γ.

Misalkan Xmerupakan Ruang barisan, maka :

Dual α dari X yang dinotasikan denganX^α adalah ruang dari semua barisan $y = \{y_k\}$ sedemikian hingga sehingga :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| < +\infty, untuk\ setiap\ x \in X$$

Sementara itu, Dual β dari X yang dinotasikan dengan X^β adalah ruang dari semua barisan $y = \{y_k\}$ sedemikian hingga sehingga :

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\ konvergen, untuk\ setiap\ x \in X$$

dan, Dual γ dari X yang dinotasikan dengan X^γ adalah ruang dari semua barisan $y = \{y_k\}$ sedemikian hingga sehingga:

$$\sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right|; n \geq 1\right\} < +\infty\ , untuk\ setiap\ x \in X$$

Pada tulisan ini penulis akan mengkaji secara detail tentang pembahsan **Dual-$\boldsymbol{\alpha}$, Dual-$\boldsymbol{\beta}$ dan Dual-$\boldsymbol{\gamma}$ dari Ruang Barisan $\boldsymbol{cs}$.**

MATERI DAN METODE

Di dalam bagian ini akan dibahas tentang pengertian-pengertian dasar yang akan digunakan sebagai landasan pada pembicaraan pembahasan berikutnya. Beberapa konsep, sifat dan teorema-teorema akan digunakan dalam tulisan ini dianggap sudah dipahami, dan bisa merujuk langsung dalam daftar pustaka.

Fungsi Linier Kontinu

Dalam sub bagian ini akan dibicarakan pengertian dan sifat-sifat dari fungsi linier kontinu. Selanjutnya bias ditunjukkan bahwa fungsi linier kontinu ekuivalen dengan fungsi linier tebatas. Jika X dan Y ruang linier (ruang vektor atas lapangan yang sama), maka fungsi $T : X \to Y$ disebut **operator**.

Lebih lanjut operator T dikatakan linier jika untuk setiap $x, y \in X$ dan sebarang scalar α berlaku sifat-sifat berikut :

$$(1)\quad T(x+y) = T(x) + T(y).$$
$$(2)\quad T(\alpha.x) = \alpha.T(x).$$

Mudah ditunjukkan bahwa pengertian operator linier T di atas ekuivalen dengan sifat berikut: untuk setiap $x, y \in X$ dan sebarang scalar α dan β berlaku:

$$T(\alpha.x + \beta.y) = \alpha.T(x) + \beta.T(y).$$

Defenisi 2.1.1 *Diketahui* X dan Y *masing-masing ruang bernorma. Operator* T *dikatakan kontinu di* $x_0 \in X$ *jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan* $\delta > 0$ *sehingga berlaku* $\| T(x) - T(x_0) \| < \varepsilon$ *untuk setiap* $x \in X$ *dengan* $\| x - x_0 \| < \delta$.

Jadi, T *kontinu di setiap titik di dalam ruang bernorma* X *apabila* T *kontinu pada* T. *Selanjutnya operator* T *dari ruang bernorma* X *ke ruang bernorma* Y *dikatakan terbatas pada* X *jika ada bilangan* $M > 0$ *sehingga* $\| T(x) \| \le \| M(x) \|$, *untuk setiap* $x \in X$.

Teorema 2.1.2 *Diketahui* X dan Y *masing-masing ruang bernorma. Operator* T *dikatakan kontinu di* $x_0 \in X$ *jika dan hanya jika untuk setiap barisan* $\{x_n\}$ *di dalam* X *yang konvergen ke* x_0 *berakibat barisan* $\{T(x_n)\}$ *konvergen ke* $T(x_0) \in Y$.

Bukti :

Syarat perlu :

Diketahui T kontinu di $x_0 \in X$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$ dengan $\| x - x_0 \| < \delta$ maka berlaku $\| T(x) - T(x_0) \| < \varepsilon$. Diambil sebarang barisan $\{x_n\}$ di dalam X yang konvergen ke x_0 , berarti untuk bilangan $\delta > 0$ di atas, ada bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $n \ge n_0$ berlaku $\| x - x_0 \| < \delta$.

Akibatnya menurut hipotesis diperoleh : $\| T(x) - T(x_0) \| < \varepsilon$ untuk setiap $n \ge n_0$.

Jadi $\{T(x_n)\}$ konvergen ke $T(x_0) \in Y$.

Syarat cukup :

Andaikan T tidak kontinu di $x_0 \in X$, jadi terdapat bilangan $\varepsilon > 0$ sehingga untuk setiap $\delta > 0$ ada $x \in X$ dengan

$\| x-x_0 \| < \delta$ berakibat $\| T(x)-T(x_0) \| \geq \varepsilon$. Oleh karena itu untuk setiap bilangan asli n ada barisan $\{x_n\} \subset X$ dengan $\| x-x_0 \| < \frac{1}{n}$ yang berakibat $\| T(x)-T(x_0) \| \geq \varepsilon$. Kontradiksi dengan hipotesis. Jadi terbukti T kontinu di $x_0 \in X$.

Teorema 2.1.3 *Diketahui X dan Y ruang bernorma. Jika $T : X \to Y$ linier, maka pernyataan berikut ekuivalen :*

a) T kontinu pada X

b) T kontinu pada $x_0 \in X$

c) T kontinu pada $\theta \in X$

d) $\{\|T(x)\| : x \in X \; dan \; \|x\| \leq 1\}$ terbatas

e) Terdapat bilangan konstan $M > 0$ sedemikian hingga sehingga $\|T(x)\| \leq M.\|x\|$ untuk setiap $x \in X$

Bukti :

$(a) \Rightarrow (b)$ cukup jelas.

$(b) \Rightarrow (c)$

Diambil sebarang barisan $\{x_n\}$ di dalam X yang konvergen ke θ.

Akibatnya barisan $\{x_n + x_0\}$ konvergen ke $\theta + x_0 = x_0$. Karena diketahui T kontinu di x_0, maka berakibat pula,

$$T(x_n) = T(x_n) - T(x_0) + T(x_0) \to T(x_0) - T(x_0) = T(x_0 - x_0) = T(\theta)$$

Dengan kata lain $\{T(x_n)\}$ konvergen ke $T(\theta)$. Jadi, T kontinu di $\theta \in X$.

$(c) \Rightarrow (d)$

Andaikan $N = \{\|T(x)\| : x \in X \text{ dan} \|x\| \leq 1\}$ tak terbatas, maka diperoleh untuk setiap bilangan asli n terdapat $\{x_n\} \subset X$ dengan $\|x\| \leq 1$ sehingga $\|T(x_n)\| > n$.

Selanjutnya dibentuk $y_n = \frac{x_n}{n}$, untuk setiap bilangan asli n. Untuk $n \to \infty$ diperoleh $y_n \to \theta$. Karena diketahui T kontinu di $\theta \in X$, maka diperoleh $T(y_n) \to T(\theta) = \theta_y \in Y$.

Di lain pihak,

$$T(y_n) = T\left(\frac{x_n}{n}\right) = \frac{1}{n}.T(x_n).$$

Oleh karena itu

$$\|T(y_n)\| = \frac{1}{n}.\|T(x_n)\| > \frac{1}{n}.n = 1.$$

Akibatnya untuk $n \to \infty$ diperoleh $T(y_n) \to \infty$. Kontradiksi dengan $T(y_n) \to T(\theta) = \theta_y \in Y$. Jadi, pengandaian salah, yang benar adalah $N = \{\|T(x)\| : x \in X \text{ dan} \|x\| \leq 1\}$ terbatas.

$(d) \Rightarrow (e)$

Menurut hipotesis

$N = \{\|T(y)\| : y \in X \text{ dan} \|y\| \leq 1\}$ terbatas.

Jadi, terdapat bilangan $M \geq 0$ sehingga $\|T(y)\| \leq M$, untuk setiap $y \in X$ dan $\|y\| \leq 1$. Selanjutnya diambil sebarang $x \in X$ diperoleh :

1. Jika $x=\theta$, maka $\|x\|=\|\theta\|=0\le 1$ (jelas). Jadi, $\|T(x)\|=\|T(\theta)\|\le M.\|x\|$.
2. Jika $x\neq\theta$, maka $\|x\|\neq 0$. Diambil $z=\frac{x}{\|x\|}\in X$ dan $\|z\|\le 1$. Menurut hipotesis diperoleh $\|T(z)\|\le M \Leftrightarrow \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|\le M \Leftrightarrow \|T(x)\|\le M\,\|x\|$.

Berdasarkan uraian 1 dan 2 di atas terbukti terdapat bilangan $M\ge 0$ sehingga $\|T(x)\|\le M.\|x\|$, untuk setiap $x\in X$.

Diambil sebarang bilangan $\varepsilon>0$ akan ditunjukkan ada bilangan $\delta>0$ sehingga jika untuk setiap $x,y\in X$ dengan $\|x-y\|<\delta$ berakibat $T(x)-T(y)<\varepsilon$.

Jadi, diperoleh $\|T(x)-T(y)\|=\|T(x-y)\|\le M\,\|(x-y)\|<\varepsilon$, asalkan $\|x-y\|<\delta=\frac{\varepsilon}{M}$. Dengan kata lain T kontinu pada X .

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini, akan ditunjukkan $cs^{\alpha}=\ell_1, cs^{\beta}=bv,\ cs^{\gamma}=bv,\ cs^{\beta\beta}=cs,\ cs^{\dagger}=cs^{\dagger\dagger\dagger}$ dan $\varnothing\subset cs^{\alpha}\subset cs^{\beta}\subset cs^{\gamma}$, dimana $\dagger=\alpha,\beta,$ atau γ.

Didefinisikan :

$$\ell_1=\left\{x\in S:\ \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|<\infty\right\}$$

c = $himpunan\ semua\ barisan\ yang\ konvergen$

$$bv=\left\{x\in S:\ \sum_{k=1}^{\infty}|x_k-x_{k+1}|<\infty\right\}$$

c_0= h$impunan\ semua\ barisan\ konvergen\ ke$ 0

ℓ_∞ = $himpunan\ semua\ barisan\ terbatas$

$$bs=\left\{x\in S:\sup_n\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}x_k\right|\right\}<\infty\right\}$$

Teorema 3.1 **(a)** $c^{\alpha}=\ell_1$ **(b)** $\ell_\infty^{\ \alpha}=\ell_1$ **(c)** $\ell_1^{\ \beta}=\ell_\infty$ **(d)**$bv^{\gamma}=bs$

Bukti :

(a) $c^{\alpha}=\ell_1$

i. Ambil sembarang barisan $x=\{x_k\}\in c$ dan sembarang barisan $y=\{y_k\}\in\ell_1$.

   Akibatnya $:\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|<\infty$ dan $\sup_k\{|x_k|\}<\infty$

   Pandang:

   $$\sum_{k=1}^{\infty}|x_ky_k|\le\sup\{|x_k|\}\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|<\infty$$

   Dengan kata lain, $y=\{y_k\}\in cs^{\alpha}$.

ii. Ambil sembarang barisan $y=\{y_k\}\in c^{\alpha}$.

   Akibatnya : $\sum_{k=1}^{\infty}|x_ky_k|<\infty$, untuk setiap $x=\{x_k\}\in c$.

Diambil barisan $x = \{x_k\}$,

dimana : $x_k = 1$, untuk setiap $k \in N$.

Jelas bahwa $x = \{x_k\} \in c$.

Akibatnya :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < \infty$$

Dengan kata lain, $y = \{y_k\} \in \ell_1$.

Dari (i) dan (ii), dapat disimpulkan $c^{\alpha} = \ell_1$

(b) $\ell_{\infty}{}^{\alpha} = \ell_1$

i. Ambil sembarang $y = \{y_k\} \in \ell_1$ dan $x = \{x_k\} \in \ell_{\infty}$

Akibatnya : $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < \infty$ dan $\sup_k \{|x_k|\} < \infty$

Pandang :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \le \sup_k \{|x_k|\} \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < \infty$$

Dengan kata lain, $y = \{y_k\} \in \ell_{\infty}{}^{\alpha}$

ii. Ambil sembarang $y = \{y_k\} \in \ell_{\infty}{}^{\alpha}$

Akibatnya, $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| < \infty$, untuk setiap $x = \{x_k\} \in \ell_{\infty}$

Diambil barisan $x = \{x_k\}$,

dimana : $x_k = 1$, untuk setiap $k \in N$.

Jelas bahwa $x = \{x_k\} \in \ell_{\infty}$

Pandang :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < \infty$$

Dengan kata lain, $y = \{y_k\} \in \ell_1$

Dari i dan ii, dapat disimpulkan $\ell_{\infty}{}^{\alpha} = \ell_1$

(c) $\ell_1{}^{\beta} = \ell_{\infty}$

i. Ambil sembarang $y = \{y_k\} \in \ell_1$ dan $x = \{x_k\} \in \ell_{\infty}$

Akibatnya : $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < \infty$ dan $\sup_k \{|x_k|\} < \infty$

Pandang :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \le \sup_k \{|x_k|\} \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < \infty$$

Dengan kata lain, $x = \{x_k\} \in \ell_1{}^{\alpha}$

ii. Ambil sembarang $x = \{x_k\} \in \ell_1{}^{\beta}$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ konvergen untuk setiap $y = \{y_k\} \in \ell_1$

Didefinisikan : $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

Jelas bahwa $f_n(x)$ merupakan fungsional linaer di ℓ_1.

Jelas bahwa

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = f(x),$$

untuk setiap $y = \{y_k\} \in \ell_1$.

Dari Teorema 2.18, terdapat $M > 0$ sedemikian sehingga berlaku :

$$|f(x)| \le M \|x\|_1 = M \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$

Dibentuk :

$$y_k = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x_n); k = n \\ 0 \qquad ; k \ne n \end{cases}$$

Jelas bahwa $y = \{y_k\} \in \ell_1$, $\|y\|_1 = 1$ dan

$$f(x) = |x_n| < M,\ n = 1,2,3,...$$

Dengan kata lain, $x = \{x_k\} \in \ell_\infty$

Dari i dan ii, dapat disimpulkan $\ell_1^{\beta} = \ell_\infty$

(d)$bv^{\gamma} = bs$

i. Ambil sembarang $x = \{x_k\} \in bv^{\gamma}$.

Akibatnya:

$$\sup_n \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} (x_k y_k) \right| \right\} < \infty,$$ untuk setiap $y = \{y_k\} \in bv$

Diambil barisan $y = \{y_k\}$, dimana : $y_k = 1$, untuk setiap $k \in N$.

Jelas bahwa $y = \{y_k\} \in bv$.

Pandang :

$$\sup_n \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} (x_k y_k) \right| \right\} < \infty,$$

$$\Rightarrow \sup_n \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} (x_k) \right| \right\} < \infty,$$

Dengan kata lain, $x = \{x_k\} \in bs$

ii. Ambil sembarang $x = \{x_k\} \in bv$ dan $y = \{y_k\} \in bs$

Jelas bahwa, barisan $\{w_n\}$ dengan $w_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$ merupakan anggota ℓ_∞.

Karena $\ell_\infty^{\alpha} = \ell_1$, maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} w_k (a_k - a_{k+1})$ konvergen mutlak.

Akibatnya,

$$\sup_n \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n-1} \left(w_k \left(x_k - x_{k+1} \right) \right) \right| \right\} < \infty$$ Pandang:

$$\sup_n \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\left(w_k - w_{k+1} \right) x_k \right) \right| \right\}$$

$$\le \sup_n \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n-1} \left(w_k \left(x_k - x_{k+1} \right) \right) \right| + |w_n x_n| \right\}$$

$$\le \sup_n \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n-1} \left(w_k \left(x_k - x_{k+1} \right) \right) \right| \right\} + \sup_n \{ |w_n x_n| \}$$

$$\le \sup_n \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n-1} \left(w_k \left(x_k - x_{k+1} \right) \right) \right| \right\} + \left(\sup_n \{ |w_n| \} \sup_n \{ |x_n| \} \right)$$

Karena

$$\sup_n \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n-1} \left(w_k \left(x_k - x_{k+1} \right) \right) \right| \right\} < \infty,\ \sup_n \{ |w_n| \} < \infty,\ \sup_n \{ |x_n| \} < \infty$$

, maka :

$$\sup_n \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\left(w_k - w_{k+1} \right) x_k \right) \right| \right\} < \infty$$

Dengan kata lain, $y = \{y_k\} \in bv^{\gamma}$

Dari i dan ii, dapat disimpulkan $bv^{\gamma} = bs$

Teorema 3.2 *Ruang Barisan bvsubset dari c, yaitu : $bv \subset c$*

Bukti:

Ambil sembarang $x = \{x_k\} \in bv$.

Akibatnya, $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k+1}| < \infty$.

Didefinisikan: $T_n = \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k+1}|$. Jelas bahwa barisan $\{T_n\}$ konvergen, sehingga $\{T_n\}$ merupakan Barisan Cauchy.

Karena $\{T_n\}$ merupakan Barisan Cauchy, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, dengan bilangan asli m, n yang cukup besar (diasumsikan $m > n$) berlaku :

$$\left| \sum_{k=1}^{m} |x_k - x_{k+1}| - \sum_{k=1}^{n-1} |x_k - x_{k+1}| \right| < \varepsilon$$

Ambil sembarang bilangan $\varepsilon > 0$. Akibatnya, untuk setiap bilangan asli m, n yang cukup besar (diasumsikan $m > n$) berlaku :

$$|x_m - x_n| = |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + ... + x_{n+1} - x_n|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m} |x_k - x_{k+1}| < \varepsilon$$

Dengan kata lain, barisan $\{x_k\}$ merupakan Barisan Cauchy, sehingga $x = \{x_k\} \in c$

Teorema 3.3 *Jika $X \subset Y$ maka $Y^{\dagger} \subset X^{\dagger}$, dimana $\dagger = \alpha, \beta$ atau γ.*

Bukti :

i. Untuk α

Diambil sembarang $y = \{y_k\} \in Y^{\alpha}$.

Akibatnya :

$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k x_k| < \infty$, untuk setiap $x = \{x_k\} \in Y$

Karena $X \subset Y$, maka untuk setiap $z = \{z_k\} \in X$ berlaku : $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k z_k| < \infty$

Dengan kata lain, $y = \{y_k\} \in X^{\alpha}$

ii. Untuk β

Diambil sembarang $y = \{y_k\} \in Y^{\beta}$

Akibatnya :

$\sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k$ konvergen, untuk setiap $x = \{x_k\} \in Y$

Karena $X \subset Y$, maka untuk setiap $z = \{z_k\} \in X$ berlaku : $\sum_{k=1}^{\infty} y_k z_k$ konvergen

Dengan kata lain, $y = \{y_k\} \in X^{\beta}$

iii. Untuk γ

Diambil sembarang $y = \{y_k\} \in Y^{\beta}$

Akibatnya :

$$\sup\left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} y_k x_k \right|, untuk\ setiap\ n \geq 1 \right\} < \infty,$$

untuk setiap $x = \{x_k\} \in Y$

Karena $X \subset Y$, maka untuk setiap $z = \{z_k\} \in X$ berlaku

$$\sup\left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} y_k z_k \right|, untuk\ setiap\ n \geq 1 \right\} < \infty$$

Dengan kata lain, $y = \{y_k\} \in Y^{\gamma}$

Dari (i) , (ii) dan (iii), terbukti *Jika* $X \subset Y$ maka $Y^{\dagger} \subset X^{\dagger}$, dimana $\dagger = \alpha , \beta \; atau \; \gamma$.

Teorema 3.4 *Ruang dual α dari ruang barisan csadalah* ℓ_1 *, yaitu* $cs^{\alpha} = \ell_1$

Bukti :

i. Diambil sembarang $x = \{x_k\} \in cs$dan $a = \{a_k\} \in \ell_1$.

Karena $a = \{a_k\} \in \ell_1$, maka

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$$

Pandang :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| \le \sup\{|x_k|\} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$$ Hal

ini jelas, karena $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergen maka barisan $\{x_k\}$ konvergen ke 0. Karena barisan $\{x_k\}$ konvergen maka barisan $\{x_k\}$ terbatas.Karena barisan $\{x_k\}$ terbatas maka $sup\{|x_k|\}$ ada.

Jadi, $a = \{a_k\} \in cs^{\alpha}$

ii. Diambil sembarang $y = \{y_k\} \in cs^{\alpha}$.

Andaikan $y = \{y_k\} \notin \ell_1$, maka dapat dipilih suatu barisan n_i sedemikian sehingga berlaku :

$$\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} |y_k| > 2^i \; , \; (\forall i \in N)$$

Didefinisikan $x = \{x_k\}$ sebagai :

$$x_k = \begin{cases} (-1)^k 2^{-\frac{i}{2}} & ; n_i < k \le n_{i+1},\; i \in N \\ 0 & ; lainnya \end{cases}$$

Jelas bahwa $x = \{x_k\} \in cs$.

Pandang :

$$\sum_k |x_k y_k| = \sum_i \left(2^{-\frac{i}{2}} \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} |y_k| \right) \ge \sum_i 2^{\frac{i}{2}}$$

Dari ketaksamaan diatas, jelas bahwa $xy \notin cs$, akibatnya $y \notin cs^{\alpha}$.

Kontradiksi dengan $y \in cs^{\alpha}$. Jadi, haruslah $cs^{\alpha} \subset \ell_1$.

Dari (i) dan (ii), dapat disimpulkan ruang dual α dari ruang barisan cs adalah ℓ_1, yaitu $cs^{\alpha} = \ell_1$

Teorema 3.5 *Ruang dual β dari ruang barisan csadalah bv, yaitu* $cs^{\beta} = bv$

Bukti :

i. Diambil sembarang $a = \{a_k\} \in cs^{\beta}$ dan $z = \{z_k\} \in c_0$

Dibentuk :$y_k = z_k - z_{k-1}\, , k \ge 1\, , z_0 = 0$

Jelas $\{y_k\} \in cs$. Akibatnya $\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k$ konvergen.

Sementara itu :

$$\sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k+1}) a_k$$
$$= (z_1 - z_0)a_1 + (z_2 - z_1)a_2 + (z_3 - z_2)a_3 + \ldots + (z_n - z_{n-1})a_n$$

$= (a_1 - a_2)z_1 + (a_2 - a_3)z_2 + (a_3 - a_4)z_3 + \ldots\ldots + z_n a_n$

$= \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})z_k + z_n a_n$

Karena $\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k$ konvergen, $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$dan $a = \{a_k\} \in cs^\beta \subset \ell_1^{\ \beta} = \ell_\infty$,

maka diperoleh :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})z_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1})a_k$$

Dengan kata lain, $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1})z_k$ konvergen.

Karena barisan $\{z_k\} \in c_0$, maka barisan $\{a_k - a_{k+1}\} \in c_0^\beta \subseteq \ell_1$

Jadi , barisan $\{a_k\} \in bv$.

ii. Diambil sembarang barisan $a = \{a_k\} \in bv$ dan sembarang barisan $x = \{x_k\} \in cs$

Akibatnya, barisan $\{w_n\}$ dengan $w_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ merupakan anggota c.

Karena $\ell_1 = c^\alpha$, maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(a_k - a_{k+1})$ konvergen mutlak.

Akibatnya :

$$\sum_{k=1}^{n}(w_k - w_{k-1})a_k = \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})w_k + w_n a_n - w_0 a_1$$

Karena deret $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(a_k - a_{k+1})$ konvergen mutlak, maka $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(a_k - a_{k+1})$ juga konvergen. Akibatnya, menurut persamaan diatas, deret $\sum_{k=1}^{\infty}(w_k - w_{k+1})a_k$ konvergen. Jadi, $a = \{a_k\} \in cs^\beta$.

Dari (i) dan (ii), terbukti $cs^\beta = bv$.

Teorema 3.6 *Ruang dual* γ *dari ruang barisan csadalah* bv, *yaitu* $cs^\gamma = bv$

Bukti :

i. Menurut teorema 3.5, jelas bahwa $bv \subseteq cs^\beta$ dan semua barisan yang konvergen, pasti terbatas. Oleh sebab itu, $cs^\beta \subset cs^\gamma$.

Akibatnya, $bv \subset cs^\gamma$.

ii. Diambil sembarang $a = \{a_k\} \in cs^\gamma$dan $z \in c_0$.

Didefinisikan $:w_n = z_n - z_{n-1}$, $n \geq 1$, $z_0 = 0$

Maka , barisan $\{w_n\} \in cs$.

Karena $\{a_k\} \in cs^\gamma$, maka dapat dipilih konstanta $L > 0$, sedemikian sehingga :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k w_k\right| \leq L$$

Sementara itu, barisan $\{z_n\} \in c_0$ dan barisan $\{a_k\} \in cs^\gamma \subset \ell_\infty$, maka ada suatu konstanta $M > 0$ sedemikian sehingga $|a_n z_n| \leq M$untuk setiap $n \geq 1$

Sementara itu ,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k (a_k - a_{k+1})\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k (z_k - z_{k-1})\right| + |z_{n+1} a_{n+1}|$$

$\leq L + M$

Maka,

$$\{a_k - a_{k+1}\} \in c_0^\gamma \subset \ell_1.$$

Dengan kata lain $\{a_k\} \in bv$.

Dari (i) dan (ii), dapat disimpulkan bahwa ruang dual γ dari ruang barisan cs adalah bv, yaitu $cs^\gamma = bv$

Teorema 3.7*Ruang dual β dari ruang cs^βadalah cs , yaitu $cs^{\beta\beta} = cs$*

Bukti :

i. Diambil sembarang $\{a_k\} \in cs^{\beta\beta} = bv^\beta$.

Karena $\{a_k\} \in bv^\beta$, maka berlaku: $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k x_k)$ konvergen, untuk setiap $\{x_k\} \in bv$.

Diambil barisan $x = \{x_k\}$, dimana :

$x_k = 1$, untuk setiap $k \in N$.

Jelas bahwa $x = \{x_k\} \in bv$.

Akibatnya, $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k x_k) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$ konvergen.

Dengan kata lain, $a = \{a_k\} \in cs$.

ii. Diambil sembarang $x \in cs$dan $y \in cs^\beta$.

Jelas bahwa ,$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ konvergen.

Dengan kata lain, $x \in cs^{\beta\beta}$.

Dari (i) dan (ii), terbukti Ruang dual β dari ruang cs^βadalah , yaitu $cs^{\beta\beta} = cs$

Teorema 3.8*Ruang dual β dari ruang cs^γ adalah bs , yaitu $cs^{\gamma\gamma} = bs$*

Bukti:

Menurut Teorema 3.1 dan Teorema 3.6, jelas bahwa $cs^{\gamma\gamma} = bs$.

Definisi 3.9*Misalkan X suatu ruang barisan.Xdisebut$\dagger$- perfect sequence space jika dan hanya jika $X^{\dagger\dagger} = X$, dimana $\dagger = \alpha, \beta$ atau γ.*

Teorema 3.10*Ruang Barisan cs merupakan β - perfect sequence space.*

Bukti :

Dari Teorema 3.7, jelas bahwa $cs^{\beta\beta} = cs$, sehingga dapat disimpulkan bahwa Ruang Barisan cs merupakan β- *perfect sequence space.*

Teorema 3.11*Misalkan $\dagger = \alpha, \beta$ atau γ , maka berlaku : $cs \subseteq cs^{\dagger\dagger}$*

Bukti :

Diambil sembarang $a = \{a_k\} \in cs$

i. Untuk α

Ambil sembarang $\{y_k\} \in cs^\alpha$.

Karena $\{y_k\} \in cs^\alpha$, maka berlaku :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k a_k| < \infty$$

Dengan kata lain :$\{a_k\} \in cs^{\alpha\alpha}$.

ii. Untuk β

Ambil sembarang $\{y_k\} \in cs^{\beta}$.

Karena $\{y_k\} \in cs^{\beta}$, maka berlaku :

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k a_k \quad \text{konvergen}$$

Dengan kata lain :$\{a_k\} \in cs^{\beta\beta}$.

iii. Untuk γ

Ambil sembarang $\{y_k\} \in cs^{\beta}$.

Karena $\{y_k\} \in cs^{\beta}$, maka berlaku :

$$\sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} y_k a_k\right|; n \geq 1\right\} \leq \infty$$

Dengan kata lain : $\{a_k\} \in cs^{\gamma\gamma}$.

Dari (i) , (ii) , dan (iii) , terbukti : $cs \subseteq cs^{\dagger\dagger}$, dimana : $\dagger = \alpha , \beta \; atau \; \gamma$

Teorema 3.12 *Misalkan* $\dagger = \alpha , \beta \; atau \; \gamma$, *maka berlaku :* $cs^{\dagger} \subseteq cs^{\dagger\dagger\dagger}$

Bukti :

i. Untuk α

Diambil sembarang $a = \{a_k\} \in cs^{\alpha}$ dansembarang $\{y_k\} \in cs^{\alpha\alpha}$.

Karena $\{y_k\} \in cs^{\alpha\alpha}$maka berlaku :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k a_k| < \infty$$

Dengan kata lain :$\{a_k\} \in cs^{\alpha\alpha\alpha}$.

ii. Untuk β

Diambil sembarang $a = \{a_k\} \in cs^{\beta}$dansembarang $\{y_k\} \in cs^{\beta\beta}$.

Karena $\{y_k\} \in cs^{\beta\beta}$ maka berlaku :

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k a_k \quad \text{konvergen}$$

Dengan kata lain :$\{a_k\} \in cs^{\beta\beta\beta}$

iii. Untuk γ

Diambil sembarang $a = \{a_k\} \in cs^{\gamma}$dansembarang $\{y_k\} \in cs^{\gamma\gamma}$.

Karena $\{y_k\} \in cs^{\gamma\gamma}$, maka berlaku :

$$\sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} y_k a_k\right|; n \geq 1\right\} \leq \infty$$

Dengan kata lain : $\{a_k\} \in cs^{\gamma\gamma\gamma}$

Dari (i), (ii) dan (iii), disimpulkan $cs^{\dagger} \subseteq cs^{\dagger\dagger\dagger}$, dimana : $\dagger = \alpha , \beta \; atau \; \gamma$

Teorema 3.13 *Misalkan* $\dagger = \alpha , \beta \; atau \; \gamma$, *maka berlaku :* $cs^{\dagger} = cs^{\dagger\dagger\dagger}$

Bukti :

i. Dari Teorema 3.12, jelas bahwa :

$cs^{\alpha} \subseteq cs^{\alpha\alpha\alpha}$

Selanjutnya, akan ditunjukkan

$cs^{\alpha} \supseteq cs^{\alpha\alpha\alpha}$

Diambil sembarang $a = \{a_k\} \in cs^{\alpha\alpha\alpha}$

Karena $a = \{a_k\} \in cs^{\alpha\alpha\alpha}$, maka berlaku : $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k a_k|$ konvergen, dimana $x_k \in cs^{\alpha\alpha} = \ell_{\infty}$

yaitu : $\sup\{|x_k|; k \geq 1\} < \infty$. Jelas bahwa barisan $\{x_k\}$; $x_k = 1$ adalah anggota dari ℓ_{∞} Akibatnya :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k a_k| < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$$

Dengan kata lain, $a \in \ell_1 = cs^{\alpha}$

Karena $cs^{\alpha} \subseteq cs^{\alpha\alpha\alpha}$ dan $cs^{\alpha} \supseteq cs^{\alpha\alpha\alpha}$, dapat disimpulkan $cs^{\alpha} = cs^{\alpha\alpha\alpha}$

ii. Menurut Teorema 3.7, telah ditunjukkan$cs^{\beta\beta} = cs$, sehingga berlaku :

$$cs^{\beta\beta\beta} = cs^{\beta}$$

iii. Dari Teorema 3.12, jelas bahwa :

$cs^{\gamma} \subseteq cs^{\gamma\gamma\gamma}$

Selanjutnya, akan ditunjukkan

$cs^{\gamma} \supseteq cs^{\gamma\gamma\gamma}$

Diambil sembarang $a = \{a_k\} \in cs^{\gamma\gamma\gamma}$.

Karena $cs^{\gamma\gamma} = bs$, maka

$\sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k a_k\right|; n \geq 1\right\} < \infty$; dimana

$x = \{x_k\} \in bs$.

Karena $x = \{x_k\} \in bs$maka

$\sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|; n \geq 1\right\} < \infty$.

Ambil sembarang $\{y_k\} \in cs$.

Karena $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ konvergen maka

$\sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} y_k\right|; n \geq 1\right\} < \infty$.

Akibatnya : $\sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} y_k a_k\right|; n \geq 1\right\} < \infty$

; dimana $y = \{y_k\} \in cs$.

Dengan kata lain, $\{a_k\} \in cs^{\gamma}$.

Jadi , $cs^{\gamma\gamma\gamma} \subseteq cs^{\gamma}$

Karena $cs^{\gamma} \subseteq cs^{\gamma\gamma\gamma}$ dan $cs^{\gamma\gamma\gamma} \subseteq cs^{\gamma}$, maka dapat disimpulkan $cs^{\gamma\gamma\gamma} = cs^{\gamma}$.

Dari (i), (ii) dan (iii), dapat ditarik kesimpulan $cs^{\dagger} = cs^{\dagger\dagger\dagger}$; dimana $\dagger = \alpha , \beta \, atau \, \gamma$

Teorema 3.14 $\emptyset \subset cs^{\alpha} \subset cs^{\beta} \subset cs^{\gamma}$

Bukti :

i. Ambil sembarang $\in \emptyset$, akan ditunjukkan $x \in cs^{\alpha}$.

Jelas bahwa $x \in \emptyset$ merupakan pernyataan yang salah, karena $\emptyset$ tidak memiliki anggota. Sementara itu, untuk implikasi, jika anteseden salah , maka pernyataan selalu benar.

ii. Ambil sembarang $y = \{y_k\} \in cs^{\alpha}$

Akibatnya, untuk setiap $x = \{x_k\} \in cs$berlaku :

$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| < \infty$ dengan kata lain deret

$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k|$ terbatas.

Karena nilai mutlak selalu ≥ 0 , maka barisan jumlahan parsial dari deret $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k|$ naik monoton,

sehingga deret $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k|$ konvergen.

Karena deret mutlaknya konvergen, maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ juga konvergen.

Dengan kata lain, $y = \{y_k\} \in cs^{\beta}$.

iii. Ambil sembarang $y = \{y_k\} \in cs^{\beta}$.

Akibatnya, untuk setiap $x = \{x_k\} \in cs$, deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ konvergen.

Karena $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ konvergen, maka barisan jumlahan parsial dari deret tersebut terbatas. Karena barisan jumlahan parsialnya terbatas, maka terdapat bilangan $M > 0$ sedemikian sehingga berlaku :

$$\sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| ; n \geq 1\right\} \leq M < \infty$$

Dengan kata lain, $y = \{y_k\} \in cs^{\gamma}$.
Dari (i), (ii) dan (iii), dapat disimpulkan bahwa $\emptyset \subset cs^{\alpha} \subset cs^{\beta} \subset cs^{\gamma}$

SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dari Ruang Barisan cs, diperoleh kesimpulan :

1. Ruang dual α dari ruang barisan cs adalah ℓ_1, yaitu $cs^{\alpha} = \ell_1$
2. Ruang dual β dari ruang barisan cs adalah bv, yaitu $cs^{\beta} = bv$
3. Ruang dual γ dari ruang barisan cs adalah bv, yaitu $cs^{\gamma} = bv$
4. Ruang dual β dari ruang cs^{β} adalah, yaitu $cs^{\beta\beta} = cs$. Dengan kata lain Ruang Barisan cs merupakan β-*perfect sequence space*
5. Misalkan $\dagger = \alpha, \beta\ atau\ \gamma$, maka berlaku:

Pada Tugas Ahir ini, masih dibahas tentang Ruang Barisan cs dan Ruang Dual α, β dan γ dari Ruang Barisan cs. Oleh karena itu, penulis selanjutnya dapat membahas Ruang Barisan yang lain dan Ruang Dual yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, Robert & Sherbert, Donald. 2000. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley and Sons. Inc.

Berberian, Sterling. 1961. *Introduction to Hilbert Space*. Oxford University Press.

Bonar, Daniel & Khoury, Michael. 2006. *Real Infinite Series.* Mathematical Association of America.

Boos, Johan. 2001. *Classical and Modern Methods in Summability.* USA : Oxford University Press.

Bromwich, Thomas. 1965. *Introduction to the Theory of Infinite Series*. New York : MacMillan

Darmawijaya, Suparna. 1998. *Pengantar Analisis*. Yogyakarta: Percetakan UGM

Kreizig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*.
USA: John Wiley and Sons. Inc.

Mauch, Sean. 2003. *Introduction to Methods of Applied Mathematics or Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. Mauch Publishing Company.

Mursaleen, josef & Banas. 2014. *M-Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations.*Springer.

Peng Yee, Lee. 1989. *Zeller Theory and Classical Sequence Spaces*