KAJIAN FUNGSI HIPERGEOMETRIK DAN FUNGSI HIPERGEOMETRIK KONFLUEN SERTA APLIKASINYA DALAM MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA (PDB) ORDE DUA

Oktavia Sulistiyani [1], Ariyanto [2], Rapmaida M.P [3]
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknik Universitas Nusa Cendana

ABSTRACT

Hypergeometric function and Confluent Hypergeometric functions are built by the concept of the Hypergeometric series and Confluent Hypergeometric series. Hypergeometric function is a solution to the Hypergeometric equation while the Confluent Hypergeometric function is a solution to the Confluent Hypergeometric equation. Hypergeometric equation and Confluent Hypergeometric equation are the equations in the form of a second order differential equation. The purpose of this research is to find the solutions of second order ordinary differential equations using the approaches Hypergeometric series and Confluent Hypergeometric series by observing regular singular point of the ordinary differential equations. In this research indicates that the second order ordinary differential equation $xy''+(1+x)y'-\left\{\frac{m^2}{x}+\gamma\right\}y=0$ *has a regular singular point. Therefore, this differential equation has series solution that can be written as Confluent Hypergeometric function.*

Key words: *Hypergeometric, Confluent Hypergeometric.*

PENDAHULUAN

Perkembangan ilmu matematika sangatlah pesat. Hal itu terbukti dengan adanya penemuan berbagai teori yang masih digunakan sampai saat ini. Teori-teori ini ditemukan melalui penelitian dan riset yang cukup lama. Melalui berbagai riset dan penelitian yang cukup lama maka, diperoleh berbagai fungsi-fungsi khusus, seperti fungsi Gamma, fungsi Beta, fungsi Legendre, fungsi Bessel,

fungsi Hipergeometrik dan lain sebagainya. Fungsi-fungsi tersebut memiliki peranan yang cukup penting dalam mengatasi berbagai masalah dalam bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Umumnya, fungsi-fungsi khusus ini menggunakan teori dasar Kalkulus, Persamaan Diferensial dan Persamaan Diferensial Parsial.

Salah satu fungsi yang memiliki peranan cukup penting adalah fungsi Hipergeometrik. Pengertian fungsi Hipergeometrik dibangun oleh konsep deret Hipergeometrik. Deret Hipergeometrik merupakan generalisasi dari deret Geometrik biasa, yaitu:

$$1 + x + x^2 + \cdots$$

yang dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2 + ...$$

Fungsi Hipergeometrik merupakan solusi dari persamaan diferensial orde dua berbentuk khusus, yaitu:

$$x(1-x)y'' + \{\gamma - (1+\alpha+\beta)x\}y' - \alpha\beta y = 0$$

yang dikenal dengan persamaan diferensial Hipergeometrik. Sedangkan, fungsi Hipergeometrik Konfluen merupakan solusi dari persamaan diferensial orde dua, yaitu:

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0$$

yang dikenal dengan persamaan diferensial Hipergeometrik Konfluen.

Fungsi Hipergeometrik dan fungsi Hipergeometrik Konfluen ini memiliki hubungan yang erat dengan persamaan diferensial biasa orde dua namun tidak jelaskan asal penurunan fungsi Hipergeometrik dan fungs Hipergeometrik Konfluen serta bagaimana aplikasinya dalam menyelesaikan persamaan diferensial orde dua.

MATERI DAN METODE

Desain Kajian

Metode yang digunakan dalam kajian ini adalah studi literatur, yaitu mengumpulkan beberapa sumber referensi dan dibuat kajian khusus tentang fungsi Hipergeometrik dan fungsi Hipergeometrik Konfluen serta aplikasinya dalam mencari solusi persamaan diferensial orde dua. Sumber kajian diperoleh dari buku-buku referensi, jurnal-jurnal ilmiah dan artikel web lainnya.

Prosedur Kajian

Adapun langkah-langkah dari kajian tentang fungsi Hipergeometrik, yaitu :

a. Memaparkan definisi dari konsep-konsep dasar matematika, yaitu turunan, deret Taylor, integral, persamaan diferensial orde dua, fungsi Gamma, fungsi Beta, fungsi faktorial dan konsep-konsep lain yang mendukung kajian tentang fungsi Hipergeometrik dan fungsi Hipergeometrik Konfluen.
b. Mendefinisikan dan membuktikan teorema-teorema yang berkaitan dengan deret Hipergeometrik dan deret Hipergeometrik Konfluen.

c. Menurunkan persamaan Hipergeometrik sehingga diperoleh solusi dalam fungsi Hipergeometrik.
d. Menjelaskan penurunan fungsi Hipergeometrik menjadi fungsi Hipergeometrik Konfluen serta menurunkan persamaan Hipergeometrik Konfluen sehingga diperoleh solusi dalam bentuk fungsi Hipergeometrik Konfluen.
e. Menjelaskan aplikasi fungsi Hipergeometrik dan fungsi Hipergeometrik Konfluen dalam menentukan solusi persamaan diferensial orde dua homogen.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Adapun hasil yang diharapkan dalam proses pengkajian ini, yaitu :

a. Mengetahui sifat-sifat deret Hipergeometrik dan deret Hipergeometrik Konfluen.
b. Mengetahui solusi persamaan diferensial Hipergeometrik dan persamaan diferensial Hipergeometrik Konfluen.
c. Mengetahui aplikasi fungsi Hipergeometrik dan fungsi Hipergeometrik Konfluen dalam menentukan solusi persamaan diferensial orde dua homogen.

Deret Hipergeometrik

Secara umum, deret Hipergeometrik dapat ditulis sebagai :

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{r!(\gamma)_r}x^r $$

sehingga,

$$ \frac{d}{dx}\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}\,{}_2F_1(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;x) $$

Untuk $x=0$ maka,

$$ \left[\frac{d}{dx}\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)\right]_{x=0}=\frac{\alpha\beta}{\gamma} $$

Rumus Integral untuk Deret Hipergeometrik

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=\frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)}\int_0^1(1-t)^{\gamma-\beta-1}t^{\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}dt $$

Sifat-sifat Deret Hipergeometrik

Adapun beberapa sifat penting dalam deret Hipergeometrik, yaitu :

a. $ {}_2F_1(\alpha,\beta;\beta;x)=(1-x)^{-\alpha} $

b. $ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}\alpha,\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2};\frac{1}{2};x^2\right)=\frac{1}{2}\left\{(1-x)^{-\alpha}+(1+x)^{-\alpha}\right\} $

c. $ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\alpha+1;\frac{3}{2};x^2\right)=\frac{1}{2\alpha x}\left\{(1-x)^{-\alpha}-(1+x)^{-\alpha}\right\} $

d. $ {}_2F_1(1,1;2;x)=-\frac{1}{x}\log(1-x) $

Persamaan Hipergeometrik

Bentuk umum persamaan Hipergeometrik:

$$ x(1-x)y''+\{\gamma-(1+\alpha+\beta)x\}y'-\alpha\beta y=0 $$

Memiliki 3 titik singular, yaitu di titik $x=0$, $x=1$ dan $x=\infty$.

a. Untuk $x=0$

Di titik $x=0$, terdapat dua akar indisial, yaitu $\rho_1=0$ dan $\rho_2=1-\gamma$.

1. Untuk $\rho_1=0$

Solusi umumnya adalah:

$$y_1 = A\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$$

2. Untuk $\rho_2 = 1-\gamma$

   Solusi umumnya adalah:

   $$y_2 = Bx^{1-\gamma}\,{}_2F_1(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma;x)$$

Jadi, solusi umum secara keseluruhan dua titik $x=0$ adalah:

$$y = A\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) + Bx^{1-\gamma}\,{}_2F_1(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma;x)$$

b. Untuk $x=1$

Di titik $x=1$, terdapat dua akar indisial, yaitu $\rho_1 = 0$ dan $\rho_2 = \gamma-\alpha-\beta$.

Jadi solusi umum secara keseluruhan di titik $x=1$ adalah :

$$y = A\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\alpha+\beta-\gamma;1-x) + B(1-x)\,{}_2F_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma-\alpha-\beta+1;1-x)$$

c. Untuk $x=\infty$

Di titik $x=\infty$, terdapat dua akar indisial, yaitu $\rho_1=\alpha$ dan $\rho_2=\beta$.

1. Untuk $\rho_1 = \alpha$

   Solusi umumnya adalah:

   $$y_1 = Ax^{-\alpha}\,{}_2F_1\left(\alpha,\alpha+1-\gamma;1+\alpha-\beta;\frac{1}{x}\right)$$

2. Untuk $\rho_2 = \beta$

   Solusi umumnya adalah:

   $$y_2 = Bx^{-\beta}\,{}_2F_1\left(\beta,\beta+1-\gamma;1+\beta-\alpha;\frac{1}{x}\right)$$

Jadi, solusi umum secara keseluruhan di titik $x=\infty$ adalah :

$$y = Ax^{-\alpha}\,{}_2F_1\left(\alpha,\alpha-\gamma+1;1+\alpha-\beta;\frac{1}{x}\right) + Bx^{-\beta}\,{}_2F_1\left(\beta,\beta-\gamma+1;1+\beta-\alpha;\frac{1}{x}\right)$$

Deret Hipergeometrik Konfluen

Telah diketahui bahwa fungsi Hipergeometrik ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ merupakan penyelesaian dari persamaan Hipergeometrik :

$$x(1-x)y'' + \{\gamma-(1+\alpha+\beta)x\}y' - \alpha\beta y = 0$$

Jika x diganti dengan $\frac{x}{\beta}$ maka fungsi Hipergeometrik ${}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma;\frac{x}{\beta}\right)$ merupakan penyelesaian dari persamaan Hipergeometrik :

$$x\left(1-\frac{x}{\beta}\right)y'' + \left\{\gamma-\left(1+\frac{\alpha+1}{\beta}\right)x\right\}y' - \alpha y = 0$$

Bila $\beta\to\infty$ maka persamaan di atas menjadi :

$$xy'' + (\gamma-x)y' - \alpha y = 0$$

Secara umum, deret Hipergeometrik Konfluen dapat ditulis sebagai :

$${}_1F_1(\alpha;\gamma;x) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r}{r!(\gamma)_r}x^r$$

sehingga,

$$\frac{d}{dx}\,{}_1F_1(\alpha;\gamma;x) = \frac{\alpha}{\gamma}\,{}_1F_1(\alpha+1;\gamma+1;x)$$

Untuk $x=0$ maka,

$$\left[\frac{d}{dx}\,{}_1F_1(\alpha;\gamma;x)\right]_{x=0} = \frac{\alpha}{\gamma}$$

Sifat-sifat Deret Hipergeometrik Konfluen

Adapun beberapa sifat penting dalam deret Hipergeometrik Konfluen, yaitu :

a. ${}_1F_1(\alpha;\alpha;x) = e^x$

b. $_1F_1\left(\alpha+1;\alpha;x\right)=\left(1+\dfrac{x}{\alpha}\right)e^x$

Persamaan Hipergeometrik Konfluen

Bentuk umum persamaan Hipergeometrik Konfluen :

$$xy''+\left(\gamma-x\right)y'-\alpha y=0$$

Memiliki satu titik singular regular, yaitu di $x=0$ dengan akar indisial $\rho_1=0$ dan $\rho_2=1-\gamma$. Jadi, solusi umum secara keseluruhan adalah :

1. Untuk $\rho_1=0$

   Solusi umumnya adalah:

   $$y_1=A\,{}_1F_1\left(\alpha;\gamma;x\right)$$

2. Untuk $\rho_2=1-\gamma$

   Solusi umumnya adalah:

   $$y_2=Bx^{1-\gamma}\,{}_1F_1\left(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;x\right)$$

Jadi, solusi keseluruhan adalah:

$$y=A\,{}_1F_1\left(\alpha;\gamma;x\right)+Bx^{1-\gamma}\,{}_1F_1\left(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;x\right)$$

Aplikasi

Misalkan diberikan Persamaan Diferensial :

$$xy''+\left(1+x\right)y'-\left\{\frac{m^2}{x}+\gamma\right\}y=0$$

Persamaan Diferensial tersebut memiliki satu titik singular regular, yaitu di $x=0$ dengan akar indisial $\rho_1=m$ dan $\rho_2=-m$.

1. Untuk $\rho_1=m$

   Solusi umumnya adalah:

   $$y_1=A\,{}_1F_1\left(m+\gamma;2m+1;x\right)$$

2. Untuk $\rho_2=-m$

   Solusi umumnya adalah:

   $$y_2=B\,{}_1F_1\left(-m+\gamma;-2m+1;x\right)$$

Jadi, solusi umum secara keseluruhan adalah :

$$y=A\,{}_1F_1\left(m+\gamma;2m+1;x\right)+B\,{}_1F_1\left(-m+\gamma;-2m+1;x\right)$$

SIMPULAN

1. Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan: Persamaan Hipergeometrik

   $$x\left(1-x\right)y''+\left\{\gamma-\left(1+\alpha+\beta\right)x\right\}y'$$
   $$-\alpha\beta y=0$$

   memiliki 3 titik singular regular. Solusi persamaan Hipergeometrik di titik

a) $x=0$

$$y=A\,{}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma;x\right)+$$
$$Bx^{1-\gamma}\,{}_2F_1\left(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma;x\right)$$

b) $x=1$

$$y=A\,{}_2F_1\left(\alpha,\beta;\alpha+\beta-\gamma;1-x\right)+$$
$$B\left(1-x\right){}_2F_1\left(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma-\alpha-\beta+1;1-x\right)$$

c) $x=\infty$

$$y=Ax^{-\alpha}\,{}_2F_1\left(\alpha,\alpha-\gamma+1;1+\alpha-\beta;\frac{1}{x}\right)+$$
$$Bx^{-\beta}\,{}_2F_1\left(\beta,\beta-\gamma+1;1+\beta-\alpha;\frac{1}{x}\right)$$

2. Bentuk umum deret Hipergeometrik dapat ditulis:

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{r!(\gamma)_r}x^r $$

Apabila diambil nilai limitnya maka bentuk deret Hipergeometrik dapat ditulis :

$$ {}_1F_1(\alpha;\gamma;x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r}{r!(\gamma)_r}x^r $$

dan deret ini dinamakan deret Hipergeometrik Konfluen.

3. Persamaan Hipergeometrik Konfluen memiliki 1 titik singular regular. Solusi persamaan Hipergeometrik Konfluen di titik $x=0$ dapat ditulis : $y=A\,{}_1F_1(\alpha;\gamma;x)+Bx^{1-\gamma}\,{}_1F_1(\alpha-\gamma;2-\gamma;x)$
4. Dengan menggunakan pen-dekatan deret Hipergeometrik dan deret Hipergeometrik Konfluen maka, solusi persamaan diferensial biasa orde dua pun dapat dicari. Asalkan persamaan diferensial tersebut memiliki paling sedikit 1 titik singular regular. Apabila tidak memiliki singular regular maka, solusi persamaan diferensial tersebut tidak dapat dicari dengan menggunakan pendekatan kedua deret tersebut.

Bagi peneliti selanjutnya agar dapat mengkaji lagi mengenai deret Hipergeometrik dan deret Hipergeometrik Konfluen terutama aplikasinya dalam menentukan solusi dari persamaan-persamaan lain yang lebih kompleks, seperti persamaan gelombang maupun persamaan energi yang memiliki kaitan erat dengan ilmu fisika.

DAFTAR PUSTAKA

Andrew, Larry C. 1992. *Special Function of Mathematical for Engineers*, Second Edition. New York : SPIE Press.

Ariyanto. 2009. *Bahan Ajar Kalkulus Lanjut II*. Kupang : Universitas Nusa Cendana

Gella, Netty M. 2012. Skripsi. *Kajian Fungsi Legendre dan Aplikasinya dalam Teori Potensial*. Kupang : Universitas Nusa Cendana.

http://homepage.tudelf.nl/11r49/documents/wi4006/frobenius.pdf

Kreyzig, Erwin. 1993. *Advance Engineering Mathematics*, Seventh Edition. New York : John Wiley & Sons, Inc.

Purcell, Edwin. 2003. *Kalkulus I, Jilid I, Edisi Kedelapan*. Jakarta : Erlangga.

Sneddon, Ian N. 1956. *Mathematical Physic and Chemistry*. New York : Interscience Publishers, Inc.

Soedijono, Bambang. 1976. *Fisika Matematika*. Yogyakarta : Universitas Gadjah Mada.

Supama, dkk. 2003. *Kalkulus I, Jurusan Matematika FMIPA UGM*. Yogyakarta : FMIPA UGM.