

## KOMPARASI LAJU KONVERGENSI METODE EULER DAN RUNGE-KUTTA DALAM PENENTUAN MASSA DAN RADIUS TERSKALA *WHITE DWARFS*

**Redi K. Pingak**

*Jurusan Fisika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana*

### ABSTRACT

To determine structure of white dwarf stars, two quantities that are crucial are mass and radius of the stars. In order to determine these quantities, the analysis would be more effective computationally when we introduce scaled mass and scaled radius, i.e. to scale the quantities so that we have dimensionless mass and radius. In this article, we find numeric solutions to equation of state of white dwarfs using Euler and Runge-Kutta method to obtain scaled mass and radius of white dwarfs for a given value of central density. The solutions from the methods are also compared to see how fast the solutions converge. The equation of state used is the one used by Chandrasekhar and the electron to nucleon ratio used here is  $Y_e = 1$ . First, Euler and Runge-Kutta method are applied to solve the coupled differential equation for scaled density and scaled mass. Solutions obtained are then compared for various step sizes. Scaled mass values obtained from Euler and Runge-Kutta method are 1.298014 and 1.298013 respectively for  $h = 0.000001$ . Meanwhile, for the same  $h$ , scaled radius values are found to be 1.591624 and 1.591629 for the respective method. Comparisons of the two methods indicate that Runge-Kutta converges much faster than Euler method, just as expected. In addition, the convergence of Runge-Kutta is faster for determining scaled mass than for determining scaled radius.

**Keywords:** *white dwarfs, Chandrasekhar, scaled mass, scaled radius, scaled density, Euler method, Runge-Kutta method*

### PENDAHULUAN

Bintang kerdil putih (*white dwarfs*) adalah bintang-bintang dengan massa

sekitar  $1 M_{\odot}$ , dengan radius karakteristik sekitar  $5000 \text{ km}$  dan densitas sekitar  $10^6 \text{ gr/cm}^3$ . Bintang-bintang ini

mengalami pendinginan secara perlahan karena energi termal mereka terus diradiasikan [1].

Kajian tentang sifat-sifat fisis *white dwarfs* telah banyak dilakukan. Chandrasekhar [2,3] memasukkan efek relativitas khusus pada persamaan keadaan elektron terdegenerasi dan menemukan bahwa *white dwarfs* memiliki massa maksimum sekitar  $1,4 M_{\odot}$ , yang dikenal sebagai limit Chandrasekhar. Setelah penemuan limit Chandrasekhar ini, telah banyak penelitian dilakukan untuk mempelajari fenomena-fenomena fisis yang terjadi pada *white dwarfs*. Salah satu penelitian terbaru terkait model Chandrasekhar ini dilakukan oleh McKernan dan Ford [4] terkait kemungkinan evolusi *white dwarfs* menjadi supernova tipe Ia ketika suatu *white dwarfs* melewati limit Chandrasekhar.

Eksistensi limit Chandrasekhar ini merupakan suatu hal yang sangat penting dalam mempelajari sifat-sifat fisis *white dwarfs*, mulai dari hubungan parameter-parameter fisis seperti densitas, massa, radius sampai pada kemungkinan-kemungkinan produk evolusinya setelah melewati limit ini.

Perhitungan untuk menentukan massa dan radius terskala *white dwarfs* dalam artikel ini menggunakan persamaan

keadaan dalam keadaan equilibrium yang diturunkan dari model gas Fermi Relativistik Chandrasekhar. Kajian ini bersifat umum (tidak meninjau komposisi suatu *white dwarfs* tertentu secara khusus) sehingga dapat diasumsikan rasio elektron terhadap nukleon  $Y_e = 1$ .

**Persamaan Diferensial Terkopel untuk Massa dan Radius White Dwarfs**

Dua gaya utama yang menentukan state suatu *white dwarfs* adalah gaya gravitasi dan gaya akibat perubahan tekanan ( $p$ ) degenerasi elektron. Gaya gravitasi cenderung melakukan kompresi pada bintang sementara tekanan degenerasi cenderung untuk melawan kompresi ini.

Dalam kesetimbangan mekanik, gaya gravitasi dapat ditulis [5]

$$F_g = - \frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \dots \dots \dots (1)$$

dimana G adalah konstanta gravitasi,  $\rho(r)$  adalah densitas dan  $m(r)$  adalah massa bintang dalam radius  $r$ . Massa  $m(r)$  dapat ditulis

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' \dots \dots \dots (2)$$

Persamaan diferensial untuk massa dapat diperoleh dengan mengambil turunan dari Persamaan (2)

$$dm/dr = 4\pi r^2 \rho(r) \dots \dots \dots (3)$$

Sementara itu, pada keadaan setimbang, tidak ada gaya neto karena gaya gravitasi dan gaya akibat perubahan tekanan saling mengabaikan. Oleh karena itu, persamaan diferensial untuk densitas dapat diturunkan dari Persamaan (1) dan diperoleh

$$\left(\frac{d\rho}{dr}\right) = -\frac{Gm}{r^2} \rho \left(\frac{dp}{d\rho}\right)^{-1} \dots \dots \dots (4)$$

Persamaan (3) dan (4) adalah dua persamaan diferensial orde satu terkopel yang menentukan struktur bintang kerdil putih untuk suatu persamaan keadaan tertentu. Dari persamaan-persamaan ini, didefinisikan densitas sentral ( $\rho_c$ ) sebagai densitas bintang pada saat radius  $r = 0$ .

**Model Gas Fermi untuk *White Dwarfs*:  
Persamaan Keadaan**

Sebelum mencari solusi untuk dua persamaan orde satu terkopel di atas, perlu ditentukan persamaan keadaan bintang ini dalam keadaan setimbang. Persamaan keadaan yang diturunkan oleh Chandrasekhar (1931) menggunakan model gas Fermi relativistic untuk elektron-elektron dalam bintang. Penurunan lengkap persamaan keadaan ini dapat ditemukan di [5], dimana digunakan  $\hbar = c = 1$ . Hasil akhirnya diperoleh

$$dp/d\rho = Y_e \frac{m_e}{M_p} \gamma(x)$$

dimana

$$\gamma(x) = \frac{x^2}{3(1+x^2)^{1/2}} \dots \dots \dots (6)$$

**Penskalaan Persamaan Keadaan**

Untuk dilakukan penskalaan massa, radius dan densitas, didefinisikan [5]

$$r = R_0 \bar{r}, \quad \rho = \rho_0 \bar{\rho}, \quad m = M_0 \bar{m} \dots \dots \dots (7)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (7) ke Persamaan (3) dan (4), maka diperoleh skala untuk massa ( $M_0$ ) dan radius ( $R_0$ )

$$R_0 = 7.72 \times 10^8 Y_e \text{ cm} \dots \dots \dots (8)$$

dan

$$M_0 = 5.67 \times 10^{33} Y_e^2 \text{ gm} \dots \dots \dots (9)$$

dengan konsekuensi bahwa persamaan diferensial terkopel untuk massa dan densitas menjadi persamaan diferensial terkopel tak berdimensi sebagai berikut

$$\left(\frac{d\bar{\rho}}{d\bar{r}}\right) = -\frac{\bar{m}\bar{\rho}}{\gamma(x)\bar{r}^2} \dots \dots \dots (10)$$

$$\left(\frac{d\bar{m}}{d\bar{r}}\right) = \bar{r}^2 \bar{\rho} \dots \dots \dots (11)$$

dimana  $\gamma$  diberikan oleh Persamaan (6), dengan  $x = \bar{\rho}^{1/3}$ .

**MATERI DAN METODE**

Metode Euler dan Runge Kutta orde 4 digunakan untuk mencari solusi numerik untuk persamaan diferensial terkopel massa dan densitas terskala *white dwarfs* (Persamaan 10 dan Persamaan 11) untuk suatu nilai densitas sentral  $\rho_c$  tertentu, yang dalam penelitian ini ditetapkan bernilai

$\rho_c = 10$ . Persamaan (10) dan (11) kemudian diselesaikan untuk memperoleh massa dan radius terskala bintang ketika densitas  $\bar{\rho} = 0$ . Pada tahap ini, kestabilan solusi kedua metode diinvestigasi dan dibandingkan dengan memvariasikan *step size*. Kemudian, laju konvergensi kedua metode dibandingkan dengan menentukan eror kedua metode untuk *step size* yang berbeda terhadap suatu solusi referensi yang diperoleh pada tahap sebelumnya. Solusi referensi yang digunakan adalah solusi yang diperoleh pada tahap sebelumnya ketika menggunakan *step size* yang paling kecil (yang paling presisi). Bahasa pemrograman yang digunakan dalam penelitian ini adalah bahasa pemrograman C.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

**Penentuan Massa dan Radius terskala**

Massa dan radius terkala yang merupakan solusi Persamaan (10) dan (11) untuk nilai densitas sentral terskala sebesar  $\rho_c = 10$  ditampilkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Massa ( $\bar{m}$ ) dan radius terskala ( $\bar{r}$ ) *white dwarfs* untuk untuk nilai  $\rho_c = 10$ .

<i>h</i> (step size)	$\bar{m}$ (Euler)	$\bar{m}$ (RK)	$\bar{r}$ (Euler)	$\bar{r}$ (RK)
0.1	1.487009	1.295182	1.300000	1.500000
0.01	1.313282	1.297996	1.550000	1.580000
0.001	1.299511	1.298013	1.587000	1.591000
0.0001	1.298163	1.298013	1.591100	1.591600
0.00001	1.298028	1.298013	1.591580	1.591620

0.000001	1.298014	1.298013	1.591624	1.591629
----------	----------	----------	----------	----------

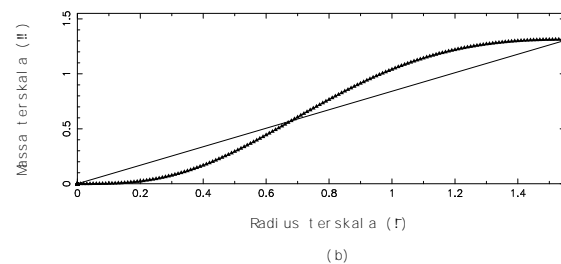
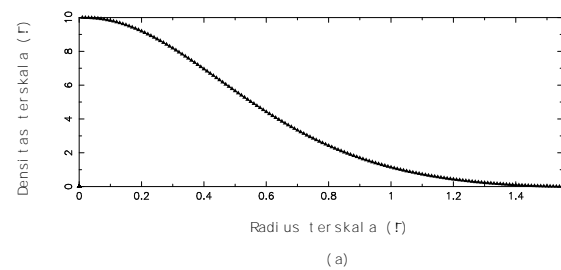
Keterangan: RK = Runge-Kutta

Nilai radius dan massa terskala pada Tabel 1 diperoleh dari solusi numerik metode Euler dan Runge Kutta pada saat nilai densitas terskala  $\bar{\rho} = 0$ .

Dari Tabel 1 terlihat bahwa untuk *step size* (*h*) yang relatif besar, perbedaan solusi dari metode Euler dan Runge Kutta cukup besar. Perbedaan ini semakin kecil ketika *h* dibuat semakin kecil. Khususnya, ketika  $h = 0.000001$ , kedua metode memberi hasil yang sama sampai dengan 5 tempat desimal.

**Hubungan Densitas, Massa dan Radius terskala**

Gambar 1 menunjukkan visualisasi solusi numerik berupa massa dan radius terskala, dihubungkan dengan densitas terskala.



Gambar 1. Grafik densitas sentral terskala vs radius terskala (gambar a) dan massa terskala vs radius terskala (gambar b).

Dari Gambar 1, terlihat bahwa densitas terskala semakin kecil seiring bertambahnya radius terskala dan sebaliknya, massa terskala semakin meningkat. Penurunan nilai densitas terskala ini mencapai suatu titik stabil menuju nol ketika radius terskala bernilai sekitar 1,5. Sementara itu, nilai massa terskala semakin meningkat dan mencapai suatu titik stabil pada nilai 1,3 ketika radius terskala bernilai sekitar 1,5. Nilai massa dan radius terskala yang *berhingga* ini (pada saat densitas terskalanya  $\bar{\rho} = 0$ ) menunjukkan bahwa pada kondisi ini permukaan bintang telah dicapai, sehingga massa dan radius bintang dapat ditentukan.

**Laju konvergensi metode Euler dan Runge-Kutta**

Untuk membandingkan solusi dari kedua metode numerik yang digunakan, perlu dipilih sebuah solusi untuk massa dan radius terskala sebagai acuan. Solusi yang dipilih adalah solusi dengan nilai  $h$  terkecil pada Tabel 1, yakni  $h = 0.000001$ . Kemudian eror kedua metode ditentukan untuk melihat laju konvergensi kedua metode dalam memperoleh solusi. Eror yang dimaksud di sini adalah selisih setiap nilai massa dan radius terskala terhadap

nilai massa dan radius terskala acuan. Nilai eror yang dihasilkan kedua metode ditampilkan pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai eror massa ( $\bar{m}$ ) dan radius terskala ( $\bar{r}$ ) untuk metode Euler dan Runge-Kutta orde 4.

$h$	Error untuk $\bar{m}$		Error untuk $\bar{r}$	
	Euler	RK	Euler	RK
0.1	0.188995	0.002831	0.291624	0.091629
0.01	0.015268	1.7E-05	0.041624	0.011629
0.001	0.001497	0	0.004624	0.000629
0.0001	0.000149	0	0.000524	2.9E-05
0.00001	1.4E-05	0	4.4E-05	9E-06
0.000001	0	0	0	0

Keterangan: RK = Runge-Kutta

Dari Tabel 2, terlihat bahwa metode Runge-Kutta memiliki laju konvergensi yang jauh lebih besar dibanding metode Euler. Misalnya, untuk massa terskala  $\bar{m}$ , metode Runge-Kutta telah memiliki nilai yang sama dengan nilai massa acuan (eror = 0) pada saat  $h = 0.001$ . Sementara itu, pada nilai  $h$  yang sama, metode Euler masih memberikan eror yang cukup besar yakni sebesar 0.001497.

Hal yang sama juga terlihat ketika nilai eror untuk radius terskala  $\bar{r}$  dibandingkan. Sebagai contoh, untuk  $h = 0.001$ , solusi dari metode Euler memiliki eror yang lebih besar dari metode Runge-Kutta, yakni 0.004624 dan 0.000629 secara berturut-turut.

Fenomena ini sesuai dengan yang diharapkan karena metode Runge-Kutta menggunakan aproksimasi polynomial orde 4 sementara metode Euler hanya melakukan aproksimasi pada orde pertama.

Suatu fenomena lain yang teramati pada Tabel 2 adalah bahwa laju konvergensi metode Runge-Kutta lebih besar untuk penentuan massa terskala dibanding dengan laju konvergensinya untuk penentuan radius terskala.

### **SIMPULAN**

Dari hasil perhitungan, diperoleh massa terskala *white dwarfs* untuk densitas sentral bernilai  $\rho_c = 10$  sebesar 1.298014 dengan menggunakan metode Euler dan sebesar 1.298013 menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 (untuk  $h = 0.000001$ ). Sementara itu, radius terskala yang

diperoleh dari kedua metode adalah 1.591624 dan 1.591629 secara berturut-turut (untuk nilai  $h$  yang sama). Dari hasil perbandingan solusi yang diperoleh, metode Runge-Kutta memiliki laju konvergensi lebih besar dibanding metode Euler. Selain itu, laju konvergensi metode Runge-Kutta lebih besar untuk penentuan massa terskala dibanding untuk penentuan radius terskala.

Hasil dalam artikel ini dapat digunakan sebagai acuan untuk studi lebih lanjut dengan memvariasikan nilai densitas sentral, untuk mengkaji lebih lanjut sifat-sifat fisis *white dwarfs*.

### **DAFTAR PUSTAKA**

- Shapiro, S., Teukolsky, S. 2004. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Object*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag.
- Chandrasekhar, S. 1931. *The Density of White Dwarf Stars*. Philosophical Magazine, 11:592.
- Chandrasekhar, S. 1931. *The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs*. Astrophysical Journal, 74:81-82.
- McKernan, B; Ford, K.E.S. 2016. *On the Resonant Detonation of Sub-Chandrasekhar Mass White Dwarfs during Binary Inspiral*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 463(2): 2039-2045.
- Koonin, SE dan Meredith, DC. 1998. *Computational Physics Fortran Version*. Westview Press.