KAJIAN SIFAT-SIFAT DUAL PADA RUANG BARISAN l^p
(*Literature Review*)

Ariyanto
Jurusan Matematika, FST, UNDANA

ABSTRACT

Sequence space l^p is defined as a set collection $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, for every Sequence $\{x_k\}$ in complex number with $1 \le p < \infty$, while dual-α on sequence space (normed) B is denoted by B^α and defined as a set collection $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k \; y_k| < \infty$, for every Sequence $\{x_k\}$ and $\{y_k\}$ in B. Properties and relations between sequence space l^p with dual-α are discussed and provided in theorem form.

Keywords : *Sequence , Sequence space l^p, dual-α.*

Salah satu cabang yang menjadi kajian matematika analisis adalah ruang barisan. [Sri Daru Unoningsih, 2002] memperkenalkan delapan ruang barisan klasik yang definisi-definisinya disajikan sebagai berikut. Koleksi semua barisan kompleks dinotasikan dengan S atau $S = \left\{ \hat{x} = \{x_k\} : x_k \in C \right\}$. Kedelapan barisan klasik tersebut adalah sebagai berikut.

1. $c = \left\{ \hat{x} = \{x_k\} \in S : \text{barisan } \{x_k\} \text{konvergen} \right\}$
2. $c_0 = \left\{ \hat{x} = \{x_k\} \in S : \text{barisan } \{x_k\} \text{konvergen ke } 0 \right\}$
3. $bv = \left\{ \hat{x} = \{x_k\} \in S : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k+1}| < \infty \right\}$
4. $bv_0 = bv \cap c_0$
5. $cs = \left\{ \hat{x} = \{x_k\} \in S : \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ konvergen} \right\}$
6. $bs = \left\{ \hat{x} = \{x_k\} \in S : \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\}_{n \ge 1} \in l^\infty \right\}$
7. $l^p = \left\{ \hat{x} = \{x_k\} \in S : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$, untuk $1 \le p < \infty$

8. $l^{\infty} = \left\{ \hat{x} = \{x_k\} \in S : \operatorname*{bat}_{k \geq 1} |x_k| < \infty \right\}$

Dari delapan ruang barisan klasik di atas yang menjadi fokus kajian pada tulisan ini adalah ruang barisan l^p. Di dalam analisis fungsional dikenal dual Banach pada ruang bernorma, dan [Lee Peng Yee, 1989] memperkenalkan pula pengertian dual-α, dual-β, dan dual-γ pada ruang barisan (bernorma). Selanjutnya, tulisan ini hanya akan mengkaji kaitan antara ruang barisan l^p dengan dual Banach dan dual-α, sedangkan kaitannya dengan dual-β dan dual-γ akan dikaji pada kesempatan yang lain.

Teori Dasar

Di dalam bagian ini akan dibahas tentang pengertian-pengertian dasar yang akan digunakan sebagai landasan pada pembicaraan pembahasan berikutnya.

Definisi 1 : *Diketahui B ruang linear atas C atau R.*

Fungsi $\|.\| : B \to R$ disebut norma bila memenuhi aksioma berikut :

(N_1) $\|x\| \geq 0$ *untuk setiap* $x \in B$ *, dan* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

(N_2) $\|\alpha . x\| = |\alpha| . \|x\|$ *untuk setiap* $x \in B$ *dan skalar* α.

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *untuk setiap* $x, y \in B$.

Ruang linear B yang diperlengkapi norma dinamakan ***ruang bernorma*** *dan dituliskan dengan $(B, \|.\|)$ atau B saja.*

Teorema 2 : *Setiap ruang bernorma B merupakan ruang metrik, dengan $d(x, y) = \|x - y\|$ untuk setiap $x, y \in B$.*

Definisi 3 : *Ruang bernorma B dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen, dan ruang bernorma lengkap disebut* ***ruang Banach.***

Teorema 4 : *Diketahui B dan B_1 masing-masing ruang bernorma. Jika $T : B \to B_1$ linear, maka pernyataan berikut ekuivalen :*

(1) T kontinu pada B.

(2) T kontinu di $x_0 \in B$.

(3) T kontinu di $\theta \in B$.

(4) $\{\|T(x)\| : x \in B \text{ dan } \|x\| \leq 1\}$ terbatas.

(5) Terdapat bilangan konstanta $M \geq 0$ sehingga $\|T(x)\| \leq M . \|x\|$, untuk setiap $x \in B$.

Selanjutnya koleksi semua fungsi linear dan kontinu dari ruang bernorma B ke ruang bernorma B_1 dinotasikan dengan $L_C(B, B_1)$.

Teorema 5 : *Diketahui B dan B_1 masing-masing ruang bernorma. $L_C(B, B_1)$ lengkap (ruang Banach) jika B_1 lengkap (ruang Banach).*

Dual Banach dari ruang bernorma dinotasikan dengan B^*, yaitu koleksi semua fungsional linear dan kontinu dari ruang bernorma B ke lapangannya.

Teorema 6 : *Ruang dual dari ruang bernorma B yaitu B^* merupakan ruang Banach.* [Berberian, 1961]

Bukti untuk empat teorema di atas ada dibuku di dalam daftar pustaka.

PENGKAJIAN

Norma pada ruang barisan l^p dan l^∞ masing-masing definisinya diberikan sebagai berikut.

Definisi 7 : Diberikan S koleksi semua barisan bilangan kompleks.

1. Untuk $1 \le p < \infty$ didefinisikan $l^p = \left\{ \hat{x} = \{x_k\} \in S : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$ yang disebut dengan **ruang barisan** l^p, dan norma pada l^p adalah $\left\| \hat{x} \right\|_p = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$.
2. Untuk $p = \infty$ didefinisikan $l^\infty = \left\{ \hat{x} = \{x_k\} \in S : \operatorname{bat}_{k \ge 1} |x_k| < \infty \right\}$, dan norma pada l^∞, yaitu $\left\| \hat{x} \right\|_\infty = \operatorname{bat}_{k \ge 1} |x_k|$.

Jelas bahwa berlaku sifat $l^1 \subset l^p \subset l^q \subset l^\infty$ dengan $1 < p < q < \infty$.

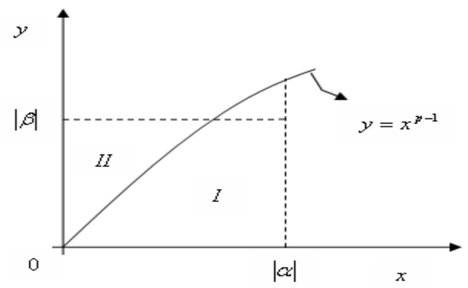
Pembahasan struktur ruang barisan l^p dimulai dengan tiga lemma berikut ini.

Lemma 8 (Lemma Young) : Jika p dan q dua bilangan real sehingga $1 < p$, $q < \infty$ dan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, maka untuk setiap dua bilangan α dan β diperoleh $|\alpha\, \beta| \le \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}$.

Bukti : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow p + q = pq \Leftrightarrow (p-1)\, q = p \Leftrightarrow (q-1)\, p = q$

Selanjutnya dibentuk fungsi kontinu $y = x^{p-1}$ atau $x = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}$, untuk $x \ge 0$.

Oleh karena itu (lihat gambar berikut ini)



Kurva $y = x^{p-1}$

Diperoleh,

$|\alpha\ \beta| = |\alpha|\ |\beta| \le$ Luas daerah I + Luas daerah II.

Jadi , $|\alpha\ \beta| \le \int_0^{|\alpha|} x^{p-1}\, dx + \int_0^{|\beta|} y^{q-1}\, dx = \dfrac{|\alpha|^p}{p} + \dfrac{|\beta|^q}{q}$.■

Lebih lanjut, dengan menggunakan Lemma Young diperoleh dua lemma berikut ini.

Lemma 9 : (1) Untuk setiap $\hat{x} = \{x_k\} \in l^1$ dan $\hat{y} = \{y_k\} \in l^\infty$ diperoleh

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\ \overline{y_k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k\ \overline{y_k}\right| \le \left\|\hat{x}\right\|_1 \left\|\hat{y}\right\|_\infty$$

(2) Jika $1 < p$, $q < \infty$ dan $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, maka untuk setiap $\hat{x} = \{x_k\} \in l^p$ dan $\hat{y} = \{y_k\} \in l^q$

maka berlaku $\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\ \overline{y_k}\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k\ \overline{y_k}\right| \le \left\|\hat{x}\right\|_p \left\|\hat{y}\right\|_q$.

Bukti : (1) Karena $\hat{x} = \{x_k\} \in l^1$ dan $\hat{y} = \{y_k\} \in l^\infty$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$ $\underset{k \ge 1}{\text{bat}} |y_k| < \infty$**.** Oleh karena itu diperoleh $\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\ \overline{y_k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k\ \overline{y_k}\right| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\right)\left(\underset{k\ge1}{\text{bat}} |y_k|\right) \le \left\|\hat{x}\right\|_1 \left\|\hat{y}\right\|_\infty$.

(2) Karena $\hat{x} = \{x_k\} \in l^p$ dan $\hat{y} = \{y_k\} \in l^q$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q < \infty$.

Selanjutnya, berdasarkan Lemma Young maka diperoleh,

$\dfrac{|x_k|}{\left\|\hat{x}\right\|_p} \dfrac{|y_k|}{\left\|\hat{y}\right\|_q} \le \dfrac{1}{p} \dfrac{1}{\left\|\hat{x}\right\|_p^p} |x_k|^p + \dfrac{1}{q} \dfrac{1}{\left\|\hat{y}\right\|_q^q} |y_k|^q$, untuk setiap k .

Oleh karena itu dengan menjumlah untuk setiap k , maka diperoleh

$$\frac{1}{\left\|\hat{x}\right\|_p \left\|\hat{y}\right\|_q} \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\ \overline{y_k}\right| \leq \frac{1}{p}\ \frac{1}{\left\|\hat{x}\right\|_p^p} \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p + \frac{1}{q}\ \frac{1}{\left\|\hat{y}\right\|_q^q} \sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k\right|^q = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

atau terbukti bahwa $\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\ \overline{y_k}\right| \leq \left\|\hat{x}\right\|_p \left\|\hat{y}\right\|_q$.■

Lemma 10 : Jika $1 \leq p \leq \infty$ maka untuk setiap $\hat{x}=\{x_k\},\ \hat{y}=\{y_k\}\in l^p$ berlaku bahwa

$$\left\|\hat{x}+\hat{y}\right\|_p \leq \left\|\hat{x}\right\|_p + \left\|\hat{y}\right\|_p .$$

Bukti : (1) Untuk $p=\infty$**.** Untuk setiap $\hat{x}=\{x_k\},\ \hat{y}=\{y_k\}\in l^{\infty}$ diperoleh

$$\left\|\hat{x}+\hat{y}\right\|_{\infty} = \left\|\{x_k\}+\{y_k\}\right\|_{\infty} = \left\|\{x_k+y_k\}\right\|_{\infty} = \underset{k\geq 1}{\text{bat}}\ |x_k+y_k|$$

$$\leq \underset{k\geq 1}{\text{bat}}\ (|x_k|+|y_k|) \leq \underset{k\geq 1}{\text{bat}}\ |x_k| + \underset{k\geq 1}{\text{bat}}\ |y_k| = \left\|\hat{x}\right\|_{\infty} + \left\|\hat{y}\right\|_{\infty} .$$

(2) Untuk $p=1$. Untuk setiap $\hat{x}=\{x_k\},\ \hat{y}=\{y_k\}\in l^1$ diperoleh

$$\left\|\hat{x}+\hat{y}\right\|_1 = \left\|\{x_k\}+\{y_k\}\right\|_1 = \left\|\{x_k+y_k\}\right\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}(|x_k|+|y_k|) = \sum_{k=1}^{\infty}|x_k| + \sum_{k=1}^{\infty}|y_k| = \left\|\hat{x}\right\|_1 + \left\|\hat{y}\right\|_1 .$$

(3) Untuk $1<p<\infty$.Untuk setiap $\hat{x}=\{x_k\},\ \hat{y}=\{y_k\}\in l^p$ diperoleh

$$|x_k+y_k|^p = |x_k+y_k|\ |x_k+y_k|^{p-1} \leq (|x_k|+|y_k|)\ |x_k+y_k|^{p-1}$$

$$= |x_k|\ |x_k+y_k|^{p-1} + |y_k|\ |x_k+y_k|^{p-1}, \text{ untuk setiap } k .$$

Dijumlah untuk semua k, diambil bilangan real q dengan $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$, dan dengan menggunakan Lemma 9 maka diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|\ |x_k+y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty}|y_k|\ |x_k+y_k|^{p-1}$$

$$\leq \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^{(1-p)q}\right\}^{\frac{1}{q}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^{(1-p)q}\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left\|\hat{x}\right\|_p \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^{P}\right\}^{\frac{1}{q}} + \left\|\hat{y}\right\|_p \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^{P}\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= (\left\| \hat{x} \right\|_p + \left\| \hat{y} \right\|_p) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^P \right\}^{\frac{1}{q}}$$

atau terbukti bahwa

$$\left\| \hat{x} + \hat{y} \right\|_p = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^P \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\| \hat{x} \right\|_p + \left\| \hat{y} \right\|_p . \blacksquare$$

Teorema 11 : Untuk setiap p dengan $1 \leq p \leq \infty$, maka l^p merupakan ruang Banach terhadap norma $\left\| \hat{x} \right\|_p = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$.

Bukti : Memperlihatkan bahwa l^p merupakan ruang bernorma terhadap norma $\left\| \hat{x} \right\|_p = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$ cukup jelas. Jadi tinggal memperlihatkan bahwa ruang bernorma tersebut lengkap. Diambil sebarang barisan Cauchy $\left\{ \hat{x}^{(n)} \right\} \subset l^p$

dengan $\hat{x}^{(n)} = \{x_k^{(n)}\} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots\}$ (a).

Untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap m, $n \geq n_0$ berlaku

$$\left\| \hat{x}^{(m)} - \hat{x}^{(n)} \right\|_p < \frac{\varepsilon}{4} \text{ atau } \sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(m)} - x_k^{(n)} \right| < \left(\frac{\varepsilon}{4} \right)^p$$

Hal ini berakibat untuk setiap m, $n \geq n_0$ berlaku $\left| x_k^{(m)} - x_k^{(n)} \right| < \frac{\varepsilon}{4}$ untuk setiap k (b).

Jadi, untuk setiap k diperoleh barisan bilangan Cauchy $\{x_k^{(n)}\}$ di dalam bilangan real yang lengkap. Oleh karena itu ada x_k sehingga $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ atau $\lim_{n\to\infty} \left| x_k^{(n)} - x_k \right| = 0$.

Berdasarkan (b) diperoleh untuk $n \geq n_0$ berlaku

$$\left| x_k^{(n)} - x_k \right| = \lim_{m\to\infty} \left| x_k^{(n)} - x_k^{(m)} \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Selanjutnya dibentuk barisan $\hat{x} = \{x_k\}$, menurut Lemma 10 maka diperoleh

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)} \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = \lim_{m\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(m)} - x_k^{(n)} + x_k^{(n)} \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)}-x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty \qquad \text{(c).}$$

yang berarti $\hat{x}=\{x_k\}\in l^p$. Lebih lanjut, berdasarkan ketidaksamaan (b), diperoleh untuk $n\geq n_0$ berlaku

$$\left\|\hat{x}-\hat{x}^{(n)}\right\|_p=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k-x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}=\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)}-x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{(d).}$$

yang berarti barisan $\left\{\hat{x}^{(n)}\right\}\subset l^p$ konvergen ke $\hat{x}$. Berdasarkan (c) dan (d) , terbukti bahwa barisan Cauchy $\left\{\hat{x}^{(n)}\right\}\subset l^p$ konvergen ke $\hat{x}=\{x_k\}\in l^p$ atau terbukti bahwa l^p merupakan ruang Banach terhadap norma $\left\|\hat{x}\right\|_p=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$.■

Teorema 12 : Jika $1<p<\infty$ dan $1<q<\infty$ dengan $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, maka $(l^p)^*=l^q$.

Bukti : Pertama akan ditunjukan bahwa $l^q\subset\left(l^p\right)^*$, yaitu setiap anggota l^q menentukan tepat satu fungsional linear kontinu pada l^p. Diambil sebarang $\hat{y}=\{y_k\}\in l^q$ dan dibentuk fungsional A_y pada l^p dengan rumus :

$A_y(\hat{x})=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\,\overline{y_k}$, untuk setiap $\hat{x}=\{x_k\}\in l^p$.

A_y linear, sebab untuk setiap $\hat{x}=\{x_k\}$, $\hat{z}=\{z_k\}\in l^p$ dan skalar α diperoleh

$A_y(\alpha\,\hat{x})=\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha\,x_k)\,\overline{y_k}=\alpha\sum_{k=1}^{\infty}x_k\,\overline{y_k}=\alpha\;A_y(\hat{x})$, dan

$A_y(\hat{x}+\hat{z})=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k+\mathrm{z}_\mathrm{k})\,\overline{y_k}=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\,\overline{y_k}+\sum_{k=1}^{\infty}z_k\,\overline{y_k}=A_y(\hat{x})+A_y(\hat{z})$

A_y kontinu, sebab menurut Lemma 10 berlaku

$\left|A_y\left(\hat{x}\right)\right|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}x_k\,\overline{y_k}\right|\leq\left\|\hat{y}\right\|_p\left\|\hat{x}\right\|_p$.

Jadi terbukti bahwa setiap $\hat{y} \in l^q$ menentukan tepat satu fungsional linear dan kontinu A_y pada l^p, $A_y \in \left(l^p\right)^*$. Jadi terbukti $l^q \subset \left(l^p\right)^*$.

Kedua, akan ditunjukkan sebaliknya yaitu $\left(l^p\right)^* \subset l^q$ atau setiap fungsional linear kontinu A pada l^p atau $A \in \left(l^p\right)^*$ menentukkan dengan tunggal suatu vektor $\hat{y} \in l^q$. Setiap $\hat{x} = \{x_k\} \in l^p$ dapat dituliskan sebagai $\hat{x} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{k}}$ dengan $\hat{e}_k$ adalah barisan bilangan real yang unsur ke-k sama dengan 1 dan semua unsur lainnya sama dengan 0, jadi

$$\hat{e}_k = (0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$$

dan $\left\{\hat{e}_k\right\}$ merupakan basis l^p. Karena A linear, diperoleh

$$A\left(\hat{x}\right) = A\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \hat{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k A\left(\hat{e}_k\right)$$

yang menyatakan bahwa $A\left(\hat{x}\right)$ merupakan kombinasi linear tak hingga terhadap barisan bilangan $\left\{A\left(\hat{e}_k\right)\right\}$. Jadi $A\left(\hat{x}\right)$ ditentukan atau bergantung pada barisan bilangan $\left\{A\left(\hat{e}_k\right)\right\}$. Lebih lanjut, karena A fungsional linear dan kontinu (terbatas) maka $A\left(\hat{x}\right) < \infty$. Sementara itu, menurut ketidaksamaan Cauchy-Schartz berlaku

$$\left|A\left(\hat{x}\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k A\left(\hat{e}_k\right)\right| \leq \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \left|A\left(\hat{e}_k\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left\|\hat{x}\right\|_p \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \left|A\left(\hat{e}_k\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Oleh karena itu haruslah

$$\left|A\left(\hat{x}\right)\right| \leq \left\|\hat{x}\right\|_p \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \left|A\left(\hat{e}_k\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

yang berarti haruslah $\sum_{k=1}^{\infty}\left|A\left(\hat{e}_k\right)\right|^q < \infty$ atau barisan-barisan bilangan $\hat{y} = \left\{A\left(\hat{e}_k\right)\right\} \in l^q$.

Jadi terbuktilah bahwa jika A suatu fungsional linear kontinu pada l^p maka terdapat vektor $\hat{y} = \left\{A\left(\hat{e}_k\right)\right\} \in l^q$ sehingga untuk setiap $\hat{x} \in l^p$ berlaku

$$\left|A\left(\hat{x}\right)\right| \le \left\|\hat{x}\right\|_p \left\|\hat{y}\right\|_q$$

atau terbukti bahwa $\left(l^p\right)^* \subset l^q$. Berdasarkan hasil langkah pertama dan hasil langkah kedua dapat disimpulkan bahwa $(l^p)^* = l^q$.■

Definisi 13 : Jika B ruang barisan (bernorma), maka didefinisikan

$\mathrm{B}^\alpha = \left\{\hat{x} = \{x_k\} : \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left|x_k\ y_k\right| < \infty, \forall\{y_k\} \in \mathrm{B}\right\}$ yang disebut dual-α untuk B.

Teorema 14 : Diketahui ruang barisan l^p dengan $1 \le p \le \infty$.

1. Untuk $p = 1$ diperoleh

   $\left(l^1\right)^\alpha = l^\infty$ dan $\left(l^\infty\right)^\alpha = l^1$

2. Untuk $1 < p < \infty$ diperoleh

   $\left(l^p\right)^\alpha = l^q$ dengan q konjugat p.

Bukti : (1) Diambil sebarang barisan $\hat{y} = \{y_k\} \in \left(l^1\right)^\alpha$, jadi $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\ y_k\right| < \infty$, untuk setiap $\{x_k\} \in l^1$. Jelas $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\ y_k\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|\left|y_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right| \sup\left|y_k\right| < \infty \Leftrightarrow \sup_{k\ge1}\left|y_k\right| < \infty$. Dengan kata lain $\hat{y} = \{y_k\} \in l^\infty$. Jadi $\left(l^1\right)^\alpha \subset l^\infty$. Sebaliknya diambil sebarang $\hat{y} = \{y_k\} \in l^\infty$, untuk setiap $\{x_k\} \in l^1$. Jadi berlaku $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\ y_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right| \sup\left|y_k\right| < \infty$. Dengan demikian $\hat{y} = \{y_k\} \in \left(l^1\right)^\alpha$. Dengan demikian $l^\infty \subset \left(l^1\right)^\alpha$. Dari keseluruhan uraian di atas terbukti bahwa $\left(l^1\right)^\alpha = l^\infty$.

Selanjutnya, diambil sebarang barisan $\hat{y} = \{y_k\} \in \left(l^\infty\right)^\alpha$. Jadi $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\ y_k\right| < \infty$, untuk setiap $\{x_k\} \in l^\infty$. Jelas bahwa $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\ y_k\right| \le \sup_{k\ge1}\left|x_k\right| \sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k\right| < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k\right| < \infty$. Dengan kata lain

$\hat{y} = \{y_k\} \in l^1$. Jadi $(l^\infty)^\alpha \subset l^1$. Sebaliknya diambil sebarang $\hat{y} = \{y_k\} \in l^1$, untuk setiap $\{x_k\} \in l^\infty$ berlaku $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k \; y_k| \le \sup_{k \ge 1} |x_k| \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < \infty$. Dengan demikian $\hat{y} = \{y_k\} \in (l^\infty)^\alpha$. Jadi $l^1 \subset (l^\infty)^\alpha$. Berdasarkan uraian di atas terbukti pula bahwa $(l^\infty)^\alpha = l^1$.

(2) Langkah pertama. Diambil sebarang $\hat{x} = \{x_k\} \in (l^p)^\alpha$. Jadi $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k \; y_k| < \infty$, untuk setiap $\hat{y} = \{y_k\} \in l^p$. Berdasarkan Lemma 10 maka diperoleh $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k \; y_k| \le \left\| \hat{x} \right\|_p \left\| \hat{y} \right\|_q < \infty \Leftrightarrow \left\| \hat{y} \right\|_q < \infty$, dengan q konjugant p. Dengan kata lain $\{x_k\} \in l^q$. Jadi $(l^p)^\alpha \subset l^q$.

Langkah kedua. Diambil sebarang $\{x_k\} \in l^q$, untuk setiap $\hat{y} = \{y_k\} \in l^p$ dan q konjugat p maka berlaku $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k \; y_k| \le \left\| \hat{x} \right\|_p \left\| \hat{y} \right\|_q < \infty$ (menurut Lemma 10). Dengan kata lain $\{x_k\} \in (l^p)^\alpha$. Jadi $l^q \subset (l^p)^\alpha$. Berdasarkan hasil langkah pertama dan hasil langkah kedua disimpulkan bahwa $(l^p)^\alpha = l^q$.

Akibat 15 : Diberikan ruang barisan l^p dengan $1 \le p \le \infty$, maka $(l^p)^{\alpha\alpha} = l^p$.

Bukti :

Jelas bahwa $(l^1)^{\alpha\alpha} = \left((l^1)^\alpha\right)^\alpha = (l^\infty)^\alpha = l^1$ dan $(l^\infty)^{\alpha\alpha} = \left((l^\infty)^\alpha\right)^\alpha = (l^1)^\alpha = l^\infty$. Selanjutnya, $(l^p)^{\alpha\alpha} = \left((l^p)^\alpha\right)^\alpha = (l^q)^\alpha = l^p$ dengan q konjugat p.

PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan keseluruhan hasil pembahasan di atas, diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Ruang barisan l^p terhadap norma $\left\| \hat{x} \right\|_p = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$ merupakan ruang Banach.
2. Untuk $p = 1$, berlaku sifat $(l^1)^\alpha = l^\infty$ dan $(l^\infty)^\alpha = l^1$.
3. Untuk $1 < p < \infty$, berlaku sifat $(l^p)^\alpha = l^q$ dengan q konjugat p.

4. Untuk $1 \leq p \leq \infty$, berlaku sifat $\left(l^p\right)^{\alpha\alpha} = l^p$.

DAFTAR PUSTAKA

Berberian, S.K. 1961. *Introduction to Hilbert Space*. Oxford University Press. New York.

Kamthan, P.K., and Manjol Gupta. 1981. *Sequence Space and Series.* Marcell Dekker Inc.

Kreyszig, E. 1978. *Introductory functional Analysis with Application.* John Wiley&Sons Inc. New York.

Maddox, I.J. 1971. *Elements of Functional Analysis.* Cambridge At The University. USA.

Unoningsih, D.S. 2002. *Materi Kuliah Kapita Selekta Analisis Program S1.* FMIPA UGM. Yogyakarta.

Yee, P.L. 1989. *Zeller Theory and Classical Sequence Space.* Lee Kong Chian Centre for Mathematical Research.