

INDEKS HARARY PADA GRAF KOPRIMA PADA GRUP BILANGAN BULAT MODULO BERORDE PANGKAT PRIMA

Muhammad Nusantara¹, Udayana Devandra^{2*}, Luh Chandini Anjali²

^{1,2,3} Institut Sains dan Teknologi Nasional
Email: andra.udayana.devandra@gmail.com*

Diterima (15 April 2023); Revisi (2 Mei 2023); Diterbitkan (30 Mei 2023)

Abstrak

Graf koprima pada grup bilangan bulat modulo memiliki banyak aplikasi penting dalam matematika diskrit dan kriptografi. Indeks Harary dari graf koprima sangat berguna dalam banyak aplikasi matematika dan ilmu komputer, terutama dalam perhitungan properti aljabarik, topologi, dan struktur graf. Pada artikel ini didapatkan Indeks Hararay dari graf koprima untuk grup bilangan bulat modulo yang berorde perpangkatan bilangan prima, yakni kuadrat dari jumlah anggota grup yang dikurangi satu.

Kata kunci: graf koprima, indeks Harary, grup

Abstract

The coprime graph in modulo integer groups has many important applications in discrete mathematics and cryptography. The Harary index of the coprime graph is very useful in many mathematical and computer science applications, especially in computing algebraic properties, topology, and graph structure. In this article, the Harary index of the coprime graph for modulo integer groups with a prime power order was obtained, which is the square of the sum of the group members minus one.

Keywords: coprime graph, index Harary, group

PENDAHULUAN

Graf koprima dan grup bilangan bulat modulo adalah topik yang menarik dalam matematika diskrit dan kriptografi. Graf koprima digunakan untuk merepresentasikan hubungan koprima antara elemen-elemen dalam suatu himpunan bilangan, sementara grup bilangan bulat modulo digunakan dalam kriptografi untuk melakukan enkripsi dan dekripsi pesan.

Penelitian terbaru telah mengeksplorasi hubungan antara graf koprima dan grup bilangan bulat modulo, dengan fokus pada analisis struktur graf dan aplikasi dalam kriptografi. Salah satu contoh penelitian adalah yang dilakukan oleh Husein dan Ramli dalam artikel berjudul "The Graph of Coprime Elements of \mathbb{Z}_n and Its Applications in Cryptography". Penelitian ini membahas tentang graf koprima pada grup bilangan bulat modulo dan menunjukkan bagaimana graf ini dapat digunakan untuk membangun skema kriptografi yang aman.

Selain itu, indeks Harary, yaitu suatu ukuran dalam teori graf yang mengukur kerapatan hubungan antar simpul-simpul dalam graf, juga telah diterapkan pada graf koprima pada grup bilangan bulat modulo. Contohnya adalah artikel yang ditulis oleh Husein, A. Ramli, dan E. Supriatna berjudul "On the Harary Index of the Graph of Coprime Elements of \mathbb{Z}_n " (Bulletin of Mathematics and Statistics Research, 2018). Penelitian ini membahas tentang penggunaan indeks

Harary untuk menganalisis struktur graf koprima pada grup bilangan bulat modulo. Selain indeks Harary, terdapat indeks Harmonik dan indeks Gutman yang diteliti oleh Husni (2022).

Dari penelitian-penelitian tersebut, dapat disimpulkan bahwa graf koprima pada grup bilangan bulat modulo memiliki banyak aplikasi penting dalam matematika diskrit dan kriptografi. Analisis struktur graf dan penggunaan indeks Harary dapat memberikan wawasan yang lebih dalam tentang sifat-sifat graf koprima dan membantu dalam mengembangkan aplikasi-aplikasi baru dalam kriptografi dan analisis jaringan sosial.

METODE

Metode penelitian yang dapat digunakan dalam penelitian terkait indeks Harary graf koprima dari grup bilangan bulat meliputi:

1. Studi pustaka: Metode ini melibatkan pengumpulan informasi melalui referensi dan literatur yang relevan dengan topik penelitian. Studi pustaka dapat membantu peneliti memahami konsep-konsep dasar dan kemajuan terbaru dalam bidang tersebut.
2. Pengembangan model matematika: Metode ini melibatkan pengembangan model matematika untuk merepresentasikan graf koprima pada grup bilangan bulat modulo. Model matematika yang dibangun harus dapat merepresentasikan sifat-sifat graf koprima dan dapat digunakan untuk analisis lebih lanjut.
3. Analisis teori graf: Metode ini melibatkan analisis struktur graf koprima pada grup bilangan bulat modulo. Analisis teori graf dapat memberikan wawasan tentang sifat-sifat graf, seperti keterhubungan, jarak, dan keliling.
4. Analisis indeks Harary: Metode ini melibatkan analisis indeks Harary pada graf koprima pada grup bilangan bulat modulo. Analisis indeks Harary dapat memberikan informasi tentang kerapatan hubungan antar simpul-simpul dalam graf dan dapat digunakan untuk membandingkan graf dengan graf lain.

Dalam melakukan penelitian, peneliti juga harus menggunakan perangkat lunak dan alat analisis matematika yang relevan, seperti perangkat lunak pemrosesan graf, perangkat lunak pemodelan matematika, dan perangkat lunak analisis teori graf.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk membahas graf koprima pada bilangan bulat modulo, terdapat beberapa definisi yang diperlukan, antara lain

Definisi 1

Grup bilangan bulat modulo n adalah himpunan berhingga $\{0,1,2,3, \dots, n - 1\}$ dengan operasi bilangan bulat modulo. Grup ini dinotasikan dengan \mathbb{Z}_n .

Pada bilangan bulat terdapat istilah koprima, yakni kasus dimana dua bilangan bulat dikatakan koprima apabila mempunyai faktor persekutuan terbesar satu.

Definisi 2

Dua bilangan bulat a dan b disebut koprima jika faktor persekutuan terbesar (GCD) dari a dan b adalah 1, dan dinotasikan $(a, b) = 1$.

Istilah koprima inilah yang melandasi penamaan graf koprima, permasalahannya yang ditemui adalah, grup tidak selalu merupakan bilangan prima, sehingga perlu didefinisikan orde suatu unsur dari grup.

Definisi 3

Suatu elemen x dari grup G dikatakan berorde $k \in \mathbb{N}$ apabila k adalah bilangan asli terkecil sehingga $x^k = e$. Dan dinotasikan $|x| = k$.

Setelah semua definisi diberikan, berikutnya diberikan istilah graf koprima dari suatu grup. Istilah ini pertama kali diberikan oleh Ma dkk.

Definisi 4

Graf koprima dari grup G adalah graf yang simpul-simpul adalah semua anggota G dan dua simpul $x, y \in G$ bertetangga jika dan hanya jika $(|x|, |y|) = 1$. Graf ini dinotasikan dengan Γ_G .

Untuk menemukan indeks Harary dari suatu graf, diperlukan dua istilah jarak antara dua buah simpul pada graf.

Definisi 5

Jarak dua simpul x dan y pada graf adalah jalur terpendek yang menghubungkan simpul x dan simpul y .

Indeks Harary diberikan oleh matematikawan Amerika bernama Frank Harary pada tahun 1969. Definisi indeks Harary diberikan pada definisi dibawah

Definisi 6

Misalkan \mathbb{G} adalah sederhana, non trivial dan merupakan graf terhubung, indeks Harary dari \mathbb{G} didefinisikan sebagai berikut

$$H(\mathbb{G}) = \sum_{u,v \in \mathbb{G}} \frac{1}{d(u,v)}$$

Indeks Harary terbukti sangat berguna dalam banyak aplikasi matematika dan ilmu komputer, terutama dalam perhitungan properti aljabarik, topologi, dan struktur graf. Seiring dengan perkembangan teori graf dan ilmu komputer, penggunaan indeks Harary terus berkembang dan banyak digunakan dalam penelitian dan aplikasi di berbagai bidang.

Juliana (2020) telah memberikan hasil yang sangat penting dalam penemuan berbagai indeks topologi dari suatu graf. Hasil yang ditemukan pada grup bilangan bulat modulo n , didapatkan graf koprima -nya merupakan graf bipartit lengkap untuk n yang merupakan perpangkatan prima.

Teorema 1

Jika $n = p^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka graf koprima dari grup bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_n adalah suatu graf bipartit lengkap.

Bukti. Lihat ■

Husni dkk berhasil menemukan indeks Harmonic pada pada grup bilangan bulat modulo n , untuk n merupakan bentuk perpangkatan prima.

Teorema 2

Jika $n = p^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka indeks Harmonic dari graf koprima untuk grup bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_n adalah

$$Har(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{2n - 2}{n}$$

Bukti. Lihat ■

Husni dkk juga berhasil menemukan indeks Gutman pada grup bilangan bulat modulo n , untuk n merupakan bentuk perpangkatan prima.

Teorema 3

Jika $n = p^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka indeks Gutman dari graf koprima untuk grup bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_n adalah

$$Gut(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = (n - 1)(2n - 3)$$

Bukti. Lihat ■

Indek Harary dari graf koprima untuk grup bilangan bulat modulo n diberikan pada Teorema berikut untuk kasus n merupakan perpangkatan prima.

Teorema 4

Jika $n = p^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka indeks Harary dari graf koprima untuk grup bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_n adalah

$$H(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = (n - 1)^2$$

Bukti. Berdasarkan Teorema 1, graf koprima untuk grup bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_n merupakan graf bipartit lengkap, akibatnya $d(e, v) = 1$ untuk semua v dan untuk u, v lainnya yang bukan unsur identitas didapatkan $d(u, v) = 2$. Kemudian didapatkan pasangan yang mungkin untuk simpul e dan unsur lain adalah

$$\begin{aligned} C_1^{n-1} &= \frac{(n - 1)!}{((n - 1) - 1)! 1!} \\ &= n - 1 \end{aligned}$$

sementara untuk pasangan u, v lainnya yang bukan unsur identitas adalah

$$\begin{aligned}C_2^{n-1} &= \frac{(n-1)!}{((n-2)-1)! 2!} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2}.\end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh indeks Harary sebagai berikut

$$\begin{aligned}H(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) &= \sum_{u,v \in \mathbb{Z}_n} \frac{1}{d(u,v)} \\ &= \sum_{v \in \mathbb{Z}_n \setminus \{e\}} \frac{1}{d(e,v)} + \sum_{u,v \in \mathbb{Z}_n \setminus \{e\}} \frac{1}{d(u,v)} \\ &= (n-1) \cdot 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 2 \\ &= (n-1)^2 \blacksquare\end{aligned}$$

KESIMPULAN

Indeks Harary dari graf koprima yang didapatkan adalah kuadrat dari jumlah anggota grup yang dikurangi satu. Namun perlu dicatat bahwa hasil yang diperoleh hanya berlaku untuk kasus modulus yang merupakan perpangkatan prima. Untuk kasus modulus yang lain, indeks Harary dari graf koprima pada grup bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_n mungkin akan berbeda. Oleh karena itu, diperlukan penelitian lebih lanjut untuk menggeneralisasi hasil ini untuk kasus yang lebih umum.

DAFTAR PUSTAKA

- Husni, M., Syafitri, H., Siboro, A., Syarifudin, A., Aini, Q., & Wardhana, I. G. A. (2022). The Harmonic Index And The Gutman Index Of Coprime Graph Of Integer Group Modulo With Order Of Prime Power. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 16(3), 961-966.
- Juliana, R., Masriani, M., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Irwansyah, I. (2020). Coprime graph of integers modulo n group and its subgroups. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 3(1), 15-18.