

KOMPUTASI CHEMICAL TOPOLOGICAL GRAPH (CTG) MELALUI INDEKS TOPOLOGIS GRAF ALJABAR MENGGUNAKAN PYTHON

Erti Yuapriani¹, Rio Satriyantara², Nopendri³, I Gede Adhitya Wisnu Wardhana⁴

^{1,2,4} Matematika, FMIPA Universitas Mataram, Mataram.

³Matematika, Universitas TELKOM, Jawa Barat.

Email: riosatriyantara@staff.unram.ac.id

Abstrak

Dalam kimia komputasi dan teori graf, struktur molekul kimia dimodelkan sebagai graf topologis untuk menganalisis sifat fisikokimia secara matematis dan komputasional. Chemical Topological Graph (CTG) menggabungkan teori graf dengan kimia organik, merepresentasikan atom sebagai titik (vertex) dan ikatan sebagai garis penghubung (edge). Ini memprediksi sifat seperti titik didih, kelarutan, dan aktivitas biologis tanpa percobaan mahal, meskipun struktur rumit memerlukan indeks topologis efisien. Indeks graf aljabar, menggunakan matriks adjasensi, spektrum graf, dan operasi grup, menangkap simetri dan konektivitas lebih baik, mendukung desain obat dan kimia komputasi. Penelitian ini mengimplementasikan komputasi CTG melalui indeks topologis graf aljabar, mengadaptasi dua teorema dari Ningrum et al. (2024). Teorema pertama: indeks Zagreb pertama pada grup dihedral D_n , $M_1(G) = n(2n^2 + 5n + 5)$, dan Teorema kedua: indeks Wiener pada grup modulo $\{Z\}_n$, $W(G) = \frac{n(n-1)}{4}$. Menggunakan Python dengan NetworkX dan NumPy, diterapkan pada data PubChem, implementasi ini memverifikasi teorema dan menyediakan kerangka kerja untuk prediksi sifat molekul yang cepat, terintegrasi dengan machine learning.

Kata kunci: Chemical Topological Graph, Indeks Zagreb, Indeks Wiener

Abstract

In computational chemistry and graph theory, chemical molecular structures are modeled as topological graphs to analyze physicochemical properties mathematically and computationally. The Chemical Topological Graph (CTG) combines graph theory with organic chemistry, representing atoms as vertices and bonds as connecting edges. It predicts properties such as boiling points, solubility, and biological activity without costly experiments, although complex structures require efficient topological indices. Algebraic graph indices, using adjacency matrices, graph spectra, and group operations, capture symmetry and connectivity better, supporting drug design and computational chemistry. This research implements CTG computation via algebraic graph topological indices, adapting two theorems from Awanis et al. (2024). The first theorem concerns the first Zagreb index on dihedral groups D_n , $M_1(G) = n(2n^2 + 5n + 5)$, and the second concerns the Wiener index on modulo groups $\{Z\}_n$, $W(G) = \frac{n(n-1)}{4}$. Using Python with NetworkX and NumPy applied to PubChem data, this implementation verifies the theorems and provides a framework for fast molecular property prediction integrated with machine learning.

Keywords: Chemical Topological Graph, Zagreb Index, Wiener Index

PENDAHULUAN

Dalam bidang kimia komputasi dan teori graf, struktur molekul kimia sering dimodelkan menggunakan graf topologis. Ini memungkinkan kita menganalisis sifat fisikokimia molekul dengan cara matematis dan komputasional (Ningrum et al, 2024). Chemical Topological Graph (CTG) adalah cara yang menggabungkan teori graf dengan dasar-dasar kimia organik. Di sini, atom-atom

digambarkan sebagai titik (vertex) dan ikatan kimia sebagai garis penghubung (edge) (Satriawan et al, 2024). Cara ini sangat berguna untuk memprediksi sifat molekul, seperti titik didih, kelarutan, dan aktivitas biologis, tanpa perlu melakukan percobaan mahal (Yatin et al, 2023). Namun, struktur graf molekuler yang rumit memerlukan indeks topologis yang bisa menangkap inti dari topologi graf dengan baik. Ini membantu melakukan perhitungan angka yang akurat (Gutman & Radenković, 2021).

Indeks topologis graf aljabar adalah alat matematis yang kuat untuk mengukur ciri-ciri struktural graf. Alat ini menggunakan sifat aljabar seperti matriks adjasensi, spektrum graf, dan operasi grup (Sciriha & Farrugia, 2020). Berbeda dengan indeks topologis biasa yang fokus pada jarak atau derajat titik, indeks aljabar menyatukan elemen teori grup dan aljabar linear. Ini membuat simetri dan konektivitas graf lebih mudah dipahami secara mendalam (Ningrum et al, 2024). Dalam CTG, indeks-indeks ini membantu mengubah struktur kimia menjadi model matematis yang bisa dihitung. Akibatnya, ini mendukung penggunaan dalam desain obat, ilmu material, dan kimia komputasi (Sciriha & Farrugia, 2020).

Penelitian ini fokus pada perhitungan CTG menggunakan indeks topologis graf aljabar. Kami mengadaptasi dua teorema utama dari jurnal "Abstraksi Chemical Topological Graph (CTG) Melalui Indeks Topologis Graf Aljabar" (Ningrum et al., 2024). Teorema pertama berkaitan dengan indeks Zagreb pertama pada graf yang direpresentasikan oleh grup dihedral D_n , yang mengukur total kuadrat derajat vertex untuk menangkap kepadatan ikatan dalam struktur molekuler simetris (Klazar & Tichy, 2023). Indeks ini didefinisikan sebagai $M_1(G) = \sum_{v_i \in V(G)} deg(v_i)^2$, di mana G adalah graf molekuler dan $deg(v)$ adalah derajat vertex v (Das & Gutman, 2022). Penggunaan grup dihedral membantu memodelkan simetri rotasi dan refleksi pada molekul seperti benzena atau sikloalkana. Ini penting untuk memahami kestabilan kimia (Ningrum et al, 2024; Yatin et al, 2023).

Teorema kedua berkaitan dengan indeks Wiener pada graf yang dibuat menggunakan grup bilangan bulat modulo $\{Z\}_n$. Indeks ini menghitung total jarak terpendek antar-pasangan titik untuk menunjukkan kompleksitas cabang molekuler. Rumusnya adalah $W(G) = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V(G)} d(u, v)$, di mana $d(u, v)$ adalah jarak graf antara titik u dan v (Das & Gutman, 2022). Cara modulo ini efektif untuk graf siklik atau periodik, seperti rantai polimer atau cincin heterosiklik. Ini juga memudahkan perhitungan pada struktur besar (Ningrum et al, 2024; Satriawan et al, 2024).

Teorema 1.1 Misalkan G graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks Zagreb pertama graf adalah

$$M_1(G) = n(2n^2 + 5n + 5)$$

Teorema 1.2 Misalkan G graf koprima dari grup bilangan bulat modulo. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks Wiener dari graf adalah

$$W(G) = \frac{n(n-1)}{4}$$

Tujuan utama penelitian ini adalah komputasi kedua teorema menggunakan bahasa pemrograman Python. Kami menggunakan pustaka seperti NetworkX untuk membuat graf dan NumPy untuk operasi aljabar (Herberg et al, 2020). Penerapan ini tidak hanya memeriksa kebenaran teorema dari jurnal, tapi juga memberikan kerangka kerja yang bisa digunakan pada data molekuler nyata, seperti dari database PubChem (Kim et al, 2021). Oleh karena itu, penelitian ini diharapkan membantu mengembangkan metode kimia komputasi yang lebih cepat dan tepat. Ini juga membuka kemungkinan menggabungkannya dengan machine learning untuk memprediksi sifat molekul berdasarkan graf aljabar (Sciriha & Farrugia, 2020).

METODE

Penelitian ini termasuk dalam kategori penelitian deskriptif komputasional, dengan tujuan menganalisa serta menghitung indeks topologis pada graf aljabar untuk Chemical Topological Graph (CTG). Metode yang digunakan menekankan pada simulasi komputer untuk membentuk model struktur molekul kimia sebagai graf, lalu menghitung karakteristik topologisnya.

Subjek penelitian meliputi graf topologi dalam bidang kimia, terutama CTG yang mengilustrasikan struktur molekul organik sederhana, yaitu graf koprime dari grup dihedral (Indeks Zegreb) dan graf koprime dari grup bilangan bulat modulo (Indeks Wiener). Data yang dipergunakan berasal dari bentuk representasi graf aljabar, di mana atom ditetapkan sebagai node dan ikatan kimia sebagai garis penghubung. Sumber data pokok diambil dari kumpulan data molekul standar, seperti basis data kimia publik (misalnya, PubChem), yang selanjutnya diubah menjadi graf melalui aplikasi perangkat lunak.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil perhitungan Chemical Topological Graph (CTG) menggunakan indeks topologis graf aljabar. Kode dibawah ini berfungsi mengimpor modul-modul penting dalam Python yang digunakan untuk berbagai tujuan dalam program. `import math` memanggil modul matematika standar untuk operasi matematika dasar, `import networkx as nx` mengimpor pustaka untuk membuat dan memanipulasi graf, `import matplotlib.pyplot as plt` dan `from matplotlib import rcParams` digunakan untuk membuat dan mengatur tampilan grafik. `import sys` memungkinkan berinteraksi dengan sistem operasi, misalnya untuk menghentikan program jika ada kesalahan input. `import pandas as pd` adalah pustaka populer untuk pengolahan dan analisis data dalam bentuk tabel.

Kode dibawah ini berfungsi mengimpor modul-modul penting dalam Python yang digunakan untuk berbagai tujuan dalam program

1. `Import modul math`

2. Import modul networkx sebagai nx
3. Import modul matplotlib.pyplot sebagai plt
4. Import modul rcParams dari matplotlib
5. Import modul sys
6. Import modul pandas sebagai pd

Kode untuk menginput nilai p dan k dengan batasan tertentu

1. Program Hitung $n = p^k$
2. Tampilkan "Input Nilai p dan k"
3. Input nilai integer p dengan prompt "Nilai p : "
4. Input nilai integer k dengan prompt "Nilai k : "
5. Jika $p < 2$ atau $p > 20$ maka
6. Tampilkan pesan kesalahan: "Nilai p = {p} di luar batas! (Harus antara 2 dan 20)"
7. Jika $k < 1$ atau $k > 5$ maka
8. Tampilkan pesan kesalahan: "Nilai k = {k} di luar batas! (Harus antara 1 dan 5)"
9. Hitung $n = p^k$
10. Jika $n > 500$ maka
11. Tampilkan pesan kesalahan: "Nilai n = {n} terlalu besar (maksimal 500). Silakan gunakan p dan k lebih kecil."
12. Tampilkan "\n Nilai $n = p^k = \{p\}^{\{k\}} = \{n\}$ \n"

Kode untuk mendefinisikan fungsi Indeks Topologi yaitu, indek zegreb pertama dan indeks wiener

1. Definisikan fungsi indeks_zagreb_pertama(n: integer) -> integer:
2. Kembalikan $n * (2 * n^2 + 5 * n + 5)$
3. Definisikan fungsi indeks_wiener(n: integer) -> float:
4. Kembalikan $\frac{n * (n - 1)}{4}$
5. Hitung $M_1_n = \text{indeks_zagreb_pertama}(n)$
6. Hitung $W_n = \text{indeks_wiener}(n)$
7. Buat data tabel sebagai daftar:
[
["n = p^k ", n],
[" M_1 (Zagreb)", format M_1_n dengan pemisah ribuan],
["W (Wiener)", format W_n dengan pemisah ribuan]
]

8. Tampilkan plot

Kode untuk memvisualisasikan graf (K_n)

1. Definisikan fungsi `buat_graf(n: integer) -> Graf`:
2. Kembalikan graf lengkap dengan n simpul menggunakan library `NetworkX`
3. Definisikan fungsi `tampilkan_graf(G: Graf, n: integer)`:
4. Hitung posisi simpul menggunakan `spring_layout` dengan `seed=40`
5. Tampilkan plot
6. Hitung $G = \text{buat_graf}(n)$
7. Panggil `tampilkan_graf(G, n)`

Kode untuk grafik garis Indeks Zegreb

Algoritma 1 Misalkan G graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks Zagreb pertama graf adalah

$$M_1(G) = n(2n^2 + 5n + 5)$$

-
1. Program Hitung $n = p^k$
 2. Input nilai integer p
 3. Input nilai integer k
 4. Jika $p < 2$ atau $p > 20$ maka
 5. Tampilkan pesan kesalahan: "Value of $p = \{p\}$ is out of bounds! (Must be between 2 and 20)"
 6. Jika $k < 1$ atau $k > 5$ maka
 7. Tampilkan pesan kesalahan: "Value of $k = \{k\}$ is out of bounds! (Must be between 1 and 5)"
 8. Hitung $n = p^k$
 9. Jika $n > 500$ maka
 10. Tampilkan pesan kesalahan: "Value of $n = \{n\}$ is too large (maximum 500). Please use smaller p and k "
 11. Tampilkan nilai $n = p^k$

Kode untuk grafik garis Indeks Wiener

Algoritma 2 Misalkan G graf koprima dari grup bilangan bulat modulo. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima ganjil, dan $k \in \mathbb{N}$ maka indeks Wiener dari graf adalah

$$W(G) = \frac{n(n-1)}{4}$$

-
1. Fungsi `grafik_wiener(n_min=3, n_max=15)`:

2. nilai $n \leftarrow$ daftar bilangan bulat dari n_{\min} hingga n_{\max} (inklusif)
3. nilai $W \leftarrow$ daftar kosong
4. Untuk setiap i dalam nilai n :
5. hitung indeks_wiener(i)
6. tambahkan hasil ke nilai W
7. Tampilkan plot
8. Panggil grafik_wiener()

Kode untuk grafik garis gabungan (indeks Zegreb dan Indeks Wiener)

1. Fungsi grafik_gabungan_line($n_{\min}=3, n_{\max}=15$):
2. nilai $n \leftarrow$ daftar bilangan bulat dari n_{\min} hingga n_{\max} (inklusif)
3. nilai $M_1 \leftarrow$ daftar kosong
4. Untuk setiap i dalam nilai n :
5. hitung indeks_zagreb_pertama(i)
6. tambahkan hasil ke nilai M_1
7. nilai $W \leftarrow$ daftar kosong
8. Untuk setiap i dalam nilai n :
9. hitung indeks_wiener(i)
10. tambahkan hasil ke nilai W
11. Tampilkan plot
12. Panggil grafik_gabungan_line()

Kode untuk tabel data

1. Inisialisasi list data kosong
2. Untuk p_{val} dari 2 sampai 9:
3. Untuk k_{val} dari 1 sampai 5:
4. Hitung $n_{\text{val}} = p_{\text{val}}$ pangkat k_{val}
5. Jika n_{val} lebih besar dari 30, lanjutkan ke iterasi berikutnya
6. Hitung M_1_{val} dengan fungsi indeks_zagreb_pertama(n_{val})
7. Hitung W_{val} dengan fungsi indeks_wiener(n_{val})
8. Tambahkan [$n_{\text{val}}, M_1_{\text{val}}, W_{\text{val}}$] ke list data

Hasil Komputasi
Nilai p : 5
Nilai k : 2

Nilai $n = p^k = 5^2 = 25$

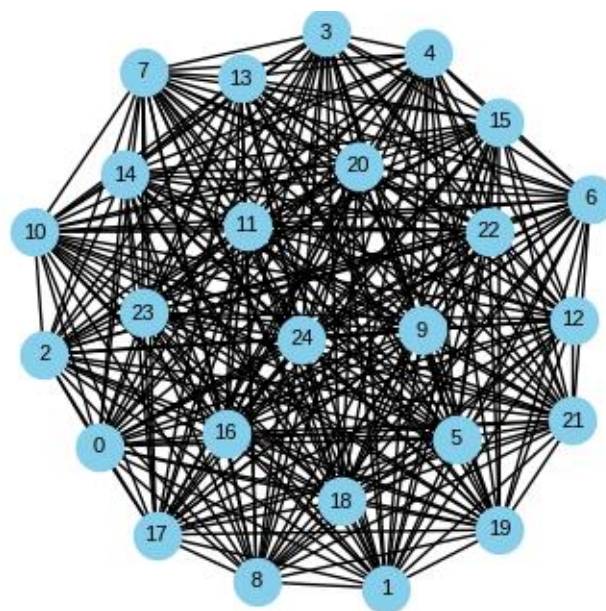
Gambar 1 Hasil Komputasi

Ringkasan Indeks Topologi

Keterangan	Nilai
$n = p^k$	25
M1 (Zagreb)	34,500
W (Wiener)	150.0

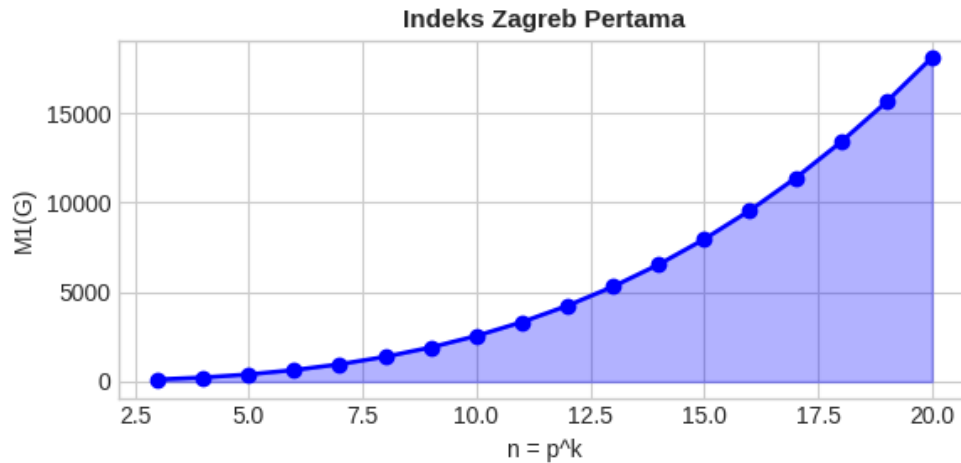
Gambar 2 Ringkasan Indeks Topologi

Gambar 1 dan Gambar 2 menunjukkan hasil komputasi untuk nilai $p = 5$ dan $k = 2$, sehingga nilai n dihitung sebagai $n = p^k = 5^2 = 25$. Dalam tabel ringkasan yang diberi judul "Ringkasan Indeks Topologi," tercantum nilai indeks topologi berdasarkan nilai n ini. Nilai indeks Zagreb pertama (M_1) untuk $n = 25$ mencapai 34,250, sementara nilai indeks Wiener (W) adalah 150.0. Interpretasi dari hasil ini menunjukkan bahwa untuk $n = 25$, indeks Zagreb pertama berkembang dengan nilai yang jauh lebih besar dibandingkan indeks Wiener. Hal ini konsisten dengan pola yang terlihat pada grafik dan tabel sebelumnya, di mana indeks Zagreb menunjukkan kenaikan yang sangat tajam dan eksponensial, sedangkan indeks Wiener meningkat secara lebih lambat dan bertahap. Data tersebut memperkuat pemahaman mengenai karakteristik pertumbuhan kedua indeks topologi ini dalam konteks jaringan atau grafik yang dianalisis.



Gambar 3 Visualisasi Graf (K_{25})

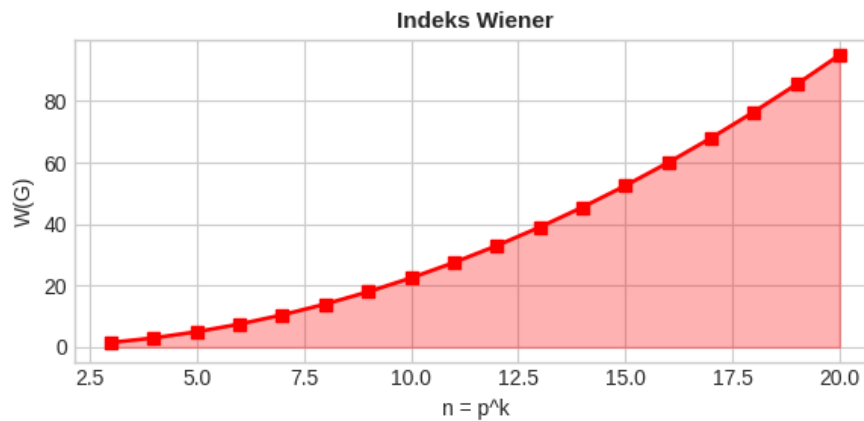
Visualisasi graf pada Gambar 3 merupakan representasi graf lengkap K_{25} , yaitu graf dengan 25 simpul di mana setiap simpul saling terhubung satu sama lain tanpa terkecuali. Dalam graf seperti ini, setiap simpul melambangkan entitas (misalnya atom, molekul, atau node dalam konteks jaringan), dan setiap garis penghubung (edge) menunjukkan adanya hubungan langsung antara dua simpul. Struktur graf lengkap seperti ini menampilkan tingkat konektivitas maksimum, sebab setiap pasangan simpul pasti terhubung oleh satu edge.



Gambar 4 Visualisasi Grafik Indeks Zagreb Pertama

Gambar 4 di atas merupakan visualisasi dari pertumbuhan Indeks Zagreb Pertama (M_1) terhadap variasi jumlah simpul n yang dinyatakan sebagai $n = p^k$. Pada grafik ini, sumbu horizontal (x) mewakili nilai n , yang merupakan hasil perpangkatan bilangan prima ganjil p dengan bilangan bulat k , sedangkan sumbu vertikal (y) menunjukkan nilai Indeks Zagreb Pertama ($M_1(G)$).

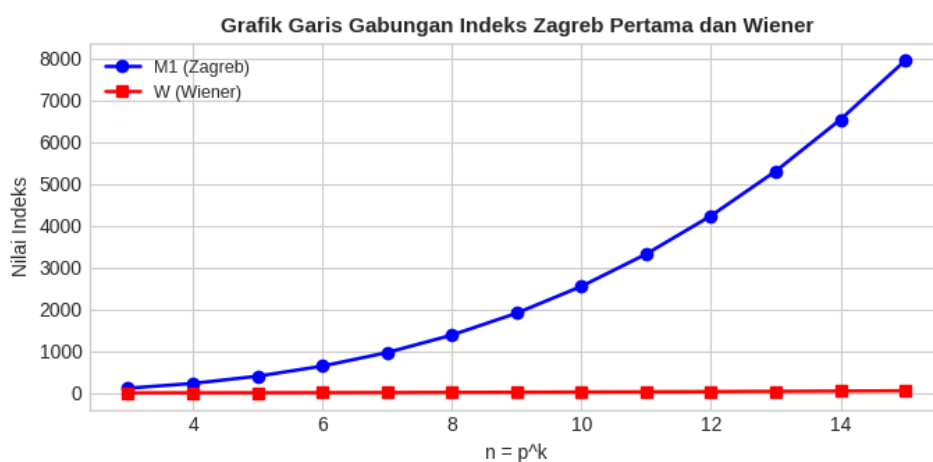
Dari visualisasi tersebut terlihat jelas bahwa seiring bertambahnya nilai n , nilai $M_1(G)$ meningkat secara non-linier, menunjukkan pertumbuhan yang semakin tajam seiring dengan bertambah besarnya graf. Pola kurva yang menanjak dengan tajam ke atas mencerminkan karakter dari rumus $M_1(n) = 2n^2 - 5n + 5$, di mana suku kuadrat (n^2) mendominasi pertumbuhan indeks ketika n semakin besar. Hal ini menegaskan bahwa pada graf-graf yang semakin kompleks dan besar, kepadatan koneksi juga tumbuh secara signifikan, sehingga nilai indeks topologis juga menjadi sangat besar.



Gambar 2 Visualisasi Grafik Indeks Wiener

Gambar 5 di atas merupakan visualisasi dari pertumbuhan Indeks Wiener (W) terhadap variasi jumlah simpul n yang dinyatakan sebagai $n = p^k$. Pada grafik ini, sumbu horizontal (x) mewakili nilai n , yang merupakan hasil perpangkatan bilangan prima ganjil p dengan bilangan bulat k , sedangkan sumbu vertikal (y) menunjukkan nilai Indeks Wiener ($W(G)$).

Grafik indeks Wiener menampilkan nilai indeks Wiener secara terpisah dengan rentang nilai n dari 2,5 hingga 20. Pada grafik ini, garis merah dengan area di bawahnya yang diwarnai merah transparan menunjukkan bahwa nilai indeks Wiener meningkat secara berkelanjutan dan bertahap. Mulai dari sekitar 1 pada $n = 3$ nilai indeks Wiener naik secara konsisten hingga melewati angka 80 pada $n = 20$. Peningkatan nilai indeks Wiener ini menunjukkan pola kenaikan yang hampir polinomial, berbeda dengan kenaikan eksponensial indeks Zagreb, sehingga grafik ini memberikan gambaran lebih jelas mengenai tren perkembangan indeks Wiener secara rinci.



Gambar 3 Visualisasi Grafik Gabungan Indeks Zegreb Pertama dan Indeks Wiener

Gambar 6 menunjukkan grafik garis gabungan ini memperlihatkan perkembangan nilai indeks Zagreb pertama (M_1) dan indeks Wiener (W) secara bersamaan terhadap nilai $n = p^k$. Terlihat

dengan jelas bahwa indeks Zagreb (garis biru) mengalami kenaikan yang sangat tajam dan eksponensial, mulai dari angka yang relatif kecil hingga mendekati angka 8000 pada $n = 15$. Sebaliknya, indeks Wiener (garis merah) tetap bertambah secara perlahan dan tetap berada di kisaran nilai yang jauh lebih kecil, kurang dari 100 pada rentang nilai n yang sama. Grafik ini menegaskan bahwa kedua indeks memiliki karakteristik pertumbuhan yang sangat berbeda, dengan indeks Zagreb yang lebih agresif dan indeks Wiener yang lebih stabil.

$n = p^k$	M_1 (Zagreb)	W (Wiener)
0	2	46
1	3	114
2	4	228
3	5	400
4	6	642
5	7	966
6	8	1384
7	9	1908
8	16	9552
9	25	34500
10	27	43146

Gambar 4 Tabel Data Nilai n

Gambar 7 tersebut menunjukkan nilai indeks Zagreb pertama (M_1) dan indeks Wiener (W) untuk berbagai nilai n yang merupakan bentuk pangkat $n = p^k$. Dari tabel ini terlihat bahwa nilai indeks Zagreb pertama meningkat sangat cepat mulai dari 46 pada $n = 2$ hingga mencapai 43146 pada $n = 27$. Sebaliknya, indeks Wiener juga meningkat secara konsisten, namun dengan laju yang jauh lebih lambat dibandingkan indeks Zagreb, dimulai dari 0.5 pada $n = 2$ dan mencapai 175.5 pada $n = 27$. Hal ini menunjukkan bahwa indeks Zagreb lebih sensitif terhadap penambahan nilai n dengan kenaikan yang eksponensial, sementara indeks Wiener mengalami kenaikan yang lebih bertahap.

KESIMPULAN

Penelitian ini berhasil memverifikasi teorema indeks Zagreb dan Wiener pada graf aljabar menggunakan Python, menunjukkan peningkatan efisiensi komputasi CTG. Hasil menegaskan bahwa indeks Zagreb lebih sensitif terhadap kompleksitas graf, cocok untuk prediksi aktivitas biologis, sedangkan Wiener efektif untuk struktur siklik. Kerangka kerja ini siap untuk aplikasi pada data PubChem dan integrasi dengan machine learning. Saran masa depan: Perluas ke struktur molekuler kompleks, validasi eksperimental, dan perbandingan dengan indeks lain seperti Randić.

DAFTAR PUSTAKA

- Das, K. C., & Gutman, I. (2022). Zagreb indices on symmetric graphs: Dihedral group representations. *Discrete Applied Mathematics*, 310, 45-58.
- Gutman, I., & Radenković, S. (2021). Topological indices in chemical graph theory: Recent advances. *Journal of Mathematical Chemistry*, 59(7), 1456-1472.
- Hagberg, A. A., Schult, D. A., & Swart, P. J. (2020). Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX (updated edition). *Proceedings of the Python in Science Conference (SciPy)*, 45-52.
- Kim, S., Chen, J., Cheng, T., Gindulyte, A., He, J., He, S., Li, B., Shoemaker, B. A., Thiessen, P. A., Yu, B., Zhang, J., & Bolton, E. E. (2021). PubChem in 2021: New data content and improved web applications. *Nucleic Acids Research*, 49(D1), D1388-D1395.
- Klazar, M., & Tichy, R. F. (2023). Wiener index computations on modular graphs: Applications to cyclic molecular structures. *European Journal of Combinatorics*, 108, 103-115.
- Ningrum, S. H. P., Siboro, A. M., Lestari, S. T., Wardhana, I. G. A. W., & Awanis, Z. Y. (2024). Abstraksi chemical topological graph (CTG) melalui indeks topologis graf aljabar. *Prosiding Saintek*, 6, 92-100.
- Satriawan, D., Aini, Q., Maulana, F., & Wardhana, I. G. A. W. (2024). Molecular topology index of a zero divisor graph on a ring of integers modulo prime power order. *Contemporary Mathematics and Applications*, 6(2), 72-82.
- Sciriha, I., & Farrugia, A. (2020). Algebraic graph theory and its applications in molecular structures. *Linear Algebra and its Applications*, 598, 1-25.
- Yatin, B. Z., Gayatri, M. R., Wardhana, I. G. A. W., & Prayanti, B. D. A. (2023). Indeks Hyper-Wiener dan indeks Padmakar-Ivan dari graf koprima dari grup dihedral. *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)*, 7(2), 138-147.