Fraktal: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Volume 3, No. 2. November 2022, Hal. 65-69 (e-ISSN 2776-0073)
Available online at https://ejurnal.undana.ac.id/fraktal

IDEAL PRIMA PADA DAERAH DEDEKIND BERUPA POLINOM FAKTOR BERDERAJAT SATU DARI RING BILANGAN BULAT

Muklas Maulana

Matematika, FMIPA Universitas Mataram, Mataram.
Email: muklas.l.maulana@gmail.com

Abstrak

Daerah Dedekind dan ideal prima merupakan bagian dari topik-topik yang dibahas dalam bidang aljabar abstrak. Suatu daerah integral dikatakan daerah Dedekind jika dan hanya jika merupakan gelanggang Noether, tertutup secara integral, dan setiap ideal prima tak nolny amerupakan ideal maksimal. Padatahun 2019,Maulana, dkk. Telah membahas mengenai sifat- sifat ideal prima pada bilangan bulat Gauss. Saat ini, belum terdapat penelitian yang membahas mengenai bentuk ideal prima pada daerah Dedekind tertentu, sehingga pada artikel ini akan diberikan bentuk-bentuk ideal prima dan sifat-sifat ideal prima padadaerah Dedekind Pada artikel ini diperoleh bahwa dan merupakan ideal prima pada Daerah Dedekind tersebut.
Kata kunci: daerahDedekind, ideal prima, tertutupsecara integral, ideal maksimal.

Abstract

Dedekind Domain and prime ideals are part of the topics discussed in the field of abstract algebra. An integral Domain is said to be the Dedekind Domain if and only if it is a Noetherian, integrally closed, and each of its prime ideals is a maximum ideal. In 2019, Maulana discussed the prime ideal's properties of Gauss integers. At present, there is no research about prime ideals of specific Dedekind Domain, because of that reason, in this article we will give some prime ideals and prime ideals' characteristics in the area of Dedekind Domain $\mathbb{Z}[x]/\langle x^2\rangle$. In this article,it is found the conclusion $I = \langle x, 0\rangle = \langle x\rangle$ and $I = \langle k, x\rangle$ are prime ideals in that Dedekind Domain.
Keywords: Dedekind domain, prime ideal, integrally closed, maximum ideal

PENDAHULUAN

Salah satu topik dalam aljabar abstrak adalah ideal prima, konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh Richard Dedekind. Ideal prima merupakan suatu ideal dengan kondisi tertentu, beberapa penelitian terkait ideal prima diantaranya dilakukan Maulana dkk pada 2019 dan Misuki dkk pada 2020. Selain itu, kajian terkait keprimaan pada ruang modul telah dilakukan pada beberapa tahun terakhir oleh Alfian dkk dan Wardhana dkk. Topik lain yang juga perlu dikaji dalam bidang aljabar adalah daerah Dedekind. Pada tahun 2011, Amir telah membahas mengenai struktur ideal prima dan gelanggang faktor dari gelanggang polinom miring atas daerah Dedekind. Namun, belum terdapat kajian mengenai bentuk-bentuk ideal prima dan karakteristik ideal prima dari suatu daerah Dedekind tertentu secara spesifik. Oleh karena itu, penulis menilai penting untuk mengkaji sifat-sifat ideal prima pada daerah Dedekind.

METODE

Pada penelitian ini, akan digunakan metode studi literatur. Melalui pengamatan pada beberapa kasus akan dibentuk suatu konjektur terkait daerah Dedekind, ideal prima, gelanggang Noether, dan

Volume 3, No. 2, November 2022, Hal. 65-69 (e-ISSN 2776-0073)

beberapa sifat terkait gelanggang. Kemudian konjektur akan dibuktikan bahwa dan merupakan ideal prima pada daerah Dedekind.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk memudahkan penjabaran terkait ideal prima pada daerah Dedekind, terlebih dahulu akan dibahas beragam definisi yang terkait dengan topik yang akan dibahas.

Definisi 1 (Fraleigh, 2013)

Sebuah gelanggang $(R, +, .)$ adalah himpunan R dengan operasi biner tambah dan perkalian, yang didefinisikan pada sehingga memenuhi :

- $(R, +)$ adalah grup abelian
- operasi perkalian bersifat asosiatif
- $\forall a, b, c \in R$, hukum distribusi kiri $a(b + c) = ab + ac$, dan hukum distribusi kanan $(b + c)a = ba + ca$ berlaku.

Sepanjang artikel ini, gelanggang yang dimaksud adalah gelanggang yang memenuhi sifat komutatif dan dinamakan gelanggang komutatif.

Definisi 2 (Herstein, 1975)

Sebuah gelanggang R disebut gelanggang komutatif apabila $\forall a, b \in R$ berlaku $ab = ba$.

Pada gelanggang, terdapat suatu sub-struktur aljabar yang selalu menarik untuk dikaji, dan dinamakan ideal.

Definisi 3 (Sivaramakrishnan, 2006)

Sebuah subhimpunan I dari gelanggang R dikatakan suatu ideal apabila I merupakan grup abelian terhdapat operasi penjumlahan dengan sifat untuk semua $r \in R$ dan $i \in I$ berlaku $ri \in I$ dan $ir \in R$.

Ada beberapa jenis ideal yang sering dikaji, yakni ideal maksimal yang merupakan ideal sejati yang paling besar, dan dinamakan ideal maksimal. Dan ideal yang merupakan abstraksi bilangan prima yang dinamakan ideal prima.

Definisi 4 (Herstein, 1975)

Sebuah ideal U pada gelanggang R disebut ideal maksimal dari R apabila terdapat ideal J dari R dengan sifat $U \subset J \subset R$, maka $U = J$ atau $R = J$.

Definisi 5 (Fraleigh, 2013)

Sebuah ideal P pada gelanggang komutatif R adalah ideal prima jika $\forall a, b \in R$ sedemikian hingga $ab \in P$ berakibat $a \in P$ atau $b \in P$.

Gelanggang sendiri memiliki banyak jenis, beberapa yang sering dikaji adalah gelanggang yang tidak memuat pembagi nol, yang dinamakan daerah integral.

Volume 3, No. 2, November 2022, Hal. 65-69 (e-ISSN 2776-0073)

Definisi 6 (Fraleigh, 2013)

Daerah integral R adalah gelanggang komutatif yang tidak memuat pembagi nol, yaitu $\forall x, y \in R$ dengan $xy = 0$, maka berlaku $x = 0$ atau $y = 0$.

Definisi 7 (Rotman, 2005)

Sebuah ideal I dari gelanggang komutatif R disebut dibangun secara berhingga jika ada berhingga elemen $a_1, a_2, \dots, a_k \in I$ dengan $I = \{\Sigma_i r_i a_i \,|r_i \in R\}$. Dengan kata lain setiap elemen pada adalah kombinasi linier dari $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

Gelanggang komutatif dimana setiap idealnya dibangun secara berhingga unsur, dinamakan gelanggang Noether. Gelanggang Noether sendiri apabila merupakan daerah integral dan semua idealnya dibangun oleh satu unsur, dikatakan daerah ideal utama. Daerah Dedekind adalah daerah integral yang setiap idealnya dibangun oleh dua unsur.

Berdasarkan penjabaran beberapa landasan teori terkait daerah Dedekind pada bagian pendahuluan, diperoleh fakta bahwa $\mathbb{Z}\left[\sqrt{n}\right] = \left\{a + b\sqrt{n}\middle| a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ merupakan suatu daerah Dedekind jika $n \not\equiv 1 (mod 4)$. Bentuk daerah Dedekind tersebut dapat digeneralisasi menjadi $R = \mathbb{Z}[x]/\langle x^2\rangle$. Selain itu, Amir telah diperoleh fakta bahwa setiap ideal pada daerah Dedekind dibangun oleh dua unsur. Selanjutnya dapat dikemukakan beberapa teorema sebagai berikut:

Teorema 1

Misalkan $R = \mathbb{Z}[x]/\langle x^2\rangle$ merupakan daerah Dedekind, maka $I = \langle x, 0\rangle = \langle x\rangle$ merupakan ideal prima pada daerah Dedekind R.

Bukti:

Misal $R = \mathbb{Z}[x]/\langle x^2\rangle = \langle 1, x\rangle$ merupakan daerah Dedekind, dengan himpunan $I = \langle x\rangle \subseteq R$, maka diperoleh untuk sebarang $c, d \in I$ berlaku $c = d = k_1 x - k_2 x = (k_1 - k_2)x \in I$ untuk suatu $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Dan juga untuk sebarang $a \in R$ dan sebarang $c \in I$ berlaku $ac = (\alpha_0 + \alpha_1 x)kx = \alpha_0 kx + \alpha_1 kx^2 = \alpha_0 kx \in I$. Sehingga dapat disimpulkan kalau I suatu ideal dari daerah Dedekind R.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $I = \langle x\rangle$ adalah suatu ideal prima bagi daerah Dedekind R. Perhatikan bahwa untuk setiap $ab \in I$, dengan $a = \alpha_0 + \alpha_1 x$ dan $b = \beta_0 + \beta_1 x$, dimana $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{Z}$, diperoleh $ab = \alpha_0\beta_0 + (\alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1)x = cx$ untuk suatu $c \in \mathbb{Z}$. Akibatnya diperoleh $\alpha_0\beta_0 = 0$, karena R adalah daerah Dedekind yang tidak memuat pembagi nol. Maka diperoleh $\alpha_0 = 0$ atau $\beta_0 = 0$. Menariknya untuk $\alpha_0 = 0$ maka diperoleh $a = \alpha_0 + \alpha_1 x = \alpha_1 x \in I$, kemudian untuk $\beta_0 = 0$ diperoleh $b = \beta_0 + \beta_1 x = \beta_1 x \in I$. Akibatnya dapat disimpulkan bahwa I adalah ideal prima. ■

Teorema 2

Misal $R = \mathbb{Z}[x]/\langle x^2\rangle = \langle 1, x\rangle$ merupakan daerah Dedekind, maka $I = \langle x, k\rangle$ dengan k merupakan bilangan prima di $\mathbb{Z}$ adalah ideal prima dari daerah Dedekind R.

Bukti:

Misal $R = \mathbb{Z}[x]/\langle x^2 \rangle = \langle 1, x \rangle$ merupakan daerah Dedekind, dengan himpunan $I = \langle x, k \rangle$ dengan k merupakan bilangan prima di $\mathbb{Z}$, maka diperoleh untuk sebarang $c, d \in I$ berlaku $c = d = (\alpha_0 k + \alpha_1 x) - (\beta_0 k + \beta_1 x) = (\alpha_0 - \beta_0)k + (\alpha_1 - \beta_1)x \in I$ untuk suatu $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{Z}$. Dan juga untuk sebarang $a \in R$ dan sebarang $c \in I$ berlaku $ac = (\beta_0 + \beta_1 x)(\alpha_0 k + \alpha_1 x) = \beta_0 \alpha_0 k + (\beta_0 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_0 k)x + (\beta_1 \alpha_1)x^2 = (\beta_0 \alpha_0)k + (\beta_0 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_0 k)x \in I$. Sehingga dapat disimpulkan kalau I suatu ideal dari daerah Dedekind R.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $I = \langle k, x \rangle$ adalah suatu ideal prima bagi daerah Dedekind R. Perhatikan bahwa untuk setiap $ab \in I$, dengan $a = \alpha_0 + \alpha_1 x$ dan $b = \beta_0 + \beta_1 x$, dimana $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{Z}$, diperoleh $ab = \alpha_0 \beta_0 + (\alpha_1 \beta_0 + \alpha_0 \beta_1)x = \gamma_0 k + \gamma_1 x$ untuk suatu $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{Z}$. Akibatnya diperoleh $\alpha_0 \beta_0 = \gamma_0 k$, sehingga $k | \alpha_0 \beta_0$ dan karena k adalah bilangan prima maka diperoleh $k | \alpha_0$ atau $k | \beta_0$. Menariknya untuk $k | \alpha_0$ maka diperoleh $a = \alpha_0 + \alpha_1 x = \sigma_1 k + \alpha_1 x \in I$ untuk suatu $\sigma_1 \in \mathbb{Z}$, kemudian untuk $k | \beta_0$ diperoleh $b = \beta_0 + \beta_1 x = \sigma_2 k + \beta_1 x \in I$ untuk suatu $\sigma_2 \in \mathbb{Z}$. Akibatnya dapat disimpulkan bahwa I adalah ideal prima. ■

KESIMPULAN

Berdasarkan penjabaran pada bagian hasil, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

• Jika $R = \mathbb{Z}[x]/\langle x^2 \rangle$ merupakan daerah Dedekind, maka $= \langle x, 0 \rangle = \langle x \rangle$ merupakan ideal prima pada daerah Dedekind R.

• Jika $R = \mathbb{Z}[x]/\langle x^2 \rangle$ merupakan daerah Dedekind, maka $= \langle x, 0 \rangle = \langle x \rangle$ merupakan ideal prima pada daerah Dedekind R..

Kemudian, untuk penelitian selanjutnya disarankan untuk mengkaji teori terkait sifat-sifat ideal prima pada daerah Dedekind yang lebih umum

DAFTAR PUSTAKA

Alfian, M. R., Maulana, F., Switrayni, N. W., Aini, Q., Putri, D. N., & Wardhana, I. G. A. W. (2022). Prime submodul of an integer over itself. *Eigen Mathematics Journal*, 27-30.

Amir, A. K., Astuti, P., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2010). *Minimal Prime Ideals of Ore Extensions over Commutative Dedekind Domains*. arXiv preprint arXiv:1002.0278.

Astuti, P., & Wimmer, H. K. (2006). Regular submodules of torsion modules over a discrete valuation domain. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 56(2), 349-357.

Berrick, A.J., & Keating, M.E. (2000). *Cambridge Studies in Advanced Mathematics 65 An Introduction to Rings and Modules with K-Theory in View*. United Kingdom: Cambridge University Press.

Fraleigh, J.B. (2013). *A First Course in Abstract Algebra* (7th ed). United Kingdom: Pearson Education Limited.

Gazir, A., & Wardhana, I. G. A. W. (2019). Subgrup Non Trivial Dari Grup Dihedral. *Eigen Mathematics Journal* 1(2), 73-76.

Herstein, I.N. (1975). *Topics in Algebra (2nd ed). United States of America*: John Wiley & Sons.

Hijriati, N., Wahyuni, S., & Wijayanti, I. E. (2018, September). *Injectivity and Projectivity Properties of the Category of Representation Modules of Rings*. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1097, No. 1, p. 012078). IOP Publishing.

Juliana, R., Wardhana, I. G. A. W., & Irwansyah. (2021, February). *Some characteristics of cyclic prime, weakly prime and almost prime submodule of Gaussian integer modulo over integer*. In AIP Conference Proceedings (Vol. 2329, No. 1, p. 020004). AIP Publishing LLC.

Maulana, F., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2018). *Bilangan Prima dan Bilangan tak Tereduksi pada Bilangan bulat Gauss*. In Prosiding Seminar Nasional APPPI II (pp. 383-387).

Maulana, F., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2019). Ekivalensi Ideal Hampir Prima dan Ideal Prima pada Bilangan Bulat Gauss. *Eigen Mathematics Journal*, 1-5.

Misuki, W. U., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2021, March). *Some Characteristics of Prime Cyclic Ideal On Gaussian Integer Ring Modulo*. In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (Vol. 1115, No. 1, p. 012084). IOP Publishing.

Kleiner, I. (2007). *A History of Abstract Algebra.* United States of America: Birkh user Boston.

Rotman, J.J. (2005). *A First Course in Abstract Algebra (3rd ed)*. United States of America: Pearson Education Limited.

Saleh, K., Astuti, P., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2016). On the structure of finitely generated primary modules. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, 38(5), 519.

Sivaramakrishnan, R. (2019). Certain Number-Theoretic Episodes in Algebra(2nd ed). United States of America: Chapman and Hall/CRC.

Switrayni, N. W., Wardhana, I. G. A. W., & Aini, Q. (2022). On Cyclic Decomposition Of Z-Module M_ {m×r}(Z_n), *Journal of Fundamental Mathematics and Applications*, 5(1), 47-51

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2021). *Teori ring dan modul*. UGM PRESS.

Wardhana, I., & Astuti, P. (2015). Karakteristik Submodul Prima Lemah dan Submodul Hampir Prima pada. *Jurnal Matematika & Sains*, 19(1), 16-20

Wardhana, I. G. A. W., Astuti, P., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2016). On almost prime submodules of a module over a principal ideal domain. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, 38(2), 121-138.

Wardhana, I. G. A. W., Nghiem, N. D. H., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2021, November). *A note on almost prime submodule of CSM module over principal ideal domain*. In Journal of Physics: Conference Series (Vol.2106, No. 1, p. 012011). IOP Publishing.

Wardhana, I. G. A. W. W., & Maulana, F. (2021). Sebuah Karakteristik dari Modul Uniserial dan Gelanggang Uniserial. *Unisda Journal of Mathematics and Computer Science (UJMC)*, 7(2), 9-18.

Wardhana, I. G. A. W. (2022). The Decomposition of a Finitely Generated Module over Some Special Ring. *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, 6(2), 261-267.

Wijayanti, I. E., & Wisbauer, R. (2009). On coprime modules and comodules. *Communications in Algebra*, 37(4), 1308-1333.

Yuwaningsih, D. A., & Wijayanti, I. E. (2015). On jointly prime radicals of (R, S)-modules. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, 25-34