Fraktal: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Volume 4, No. 1, Mei 2023, Hal. 31-36 (e-ISSN 2776-0073)
Available online at https://ejurnal.undana.ac.id/fraktal

IDEAL, GELANGGANG FAKTOR DARI GELANGGANG NOETHER

Lalu Hasan Ghoffari[1], Marena Rahayu Gayatri[2*]

[1,2]Matematika, FMIPA Universitas Mataram, Mataram
Email: marenarahayu2002@gmail.com

Diterima (23 Februari 2023); Revisi (3 Mei 2023); Diterbitkan (30 Mei 2023)

Abstrak

Aljabar abstrak adalah salah satu ilmu yang menarik dalam bidang matematika. Banyak hal yang dipelajari dalam aljabar abstrak. Salah satunya adalah gelanggang Noether. Gelanggang Noether merupakan gelanggang yang didefinisikan berdasarkan himpunan ideal berhingga dari suatu gelanggang. Adapun metode yang digunakan adalah kajian pustaka atau disebut juga studi literatur, yaitu penelitian yang dilakukan dengan mengumpulkan teori dan informasi yang berhubungan dengan penelitian dengan bantuan referensi seperti buku maupun jurnal ilmiah. Salah satu teorema yang terbentuk berdasarkan definisi gelanggang Noether adalah misalkan R adalah gelanggang Noether maka gelanggang polinomial $R[x]$ juga merupakan gelanggang Noether.

Kata kunci: aljabar abstrak, gelanggang Noether

Abstract

Abstract algebra is one of the most interesting sciences in mathematics. Many things are learned in abstract algebra. One of them is the Noetherian rings. A Noetherian ring is a ring that is defined based on a finite ideal set of a ring. The method used is a literature review or also called a literature study, namely research conducted by collecting theories and information related to research with the help of references such as books or scientific journals. One of the theorems formed based on the definition of a Noetherian is that if R is a Noetherian ring, then the polynomial ring $R[x]$ is also a Noetherian.

Keywords: Abstract algebra, Noetherian rings

PENDAHULUAN

Salah satu ilmu yang dipelajari dalam bidang matematika adalah aljabar abstrak. Aljabar abstrak merupakan salah satu cabang ilmu dalam matematika yang mempelajari tentang teori gelanggang. Gelanggang Noether merupakan gelanggang yang didefinisikan berdasarkan himpunan ideal berhingga dari suatu gelanggang (Wardhana, 2022). Ideal dari suatu gelanggang juga dapat diperumum ke dalam struktur matematika yang dikenal dengan Modul (Switrayni et al., 2022), kemudian ideal akan membentuk struktur matematika yang dinamakan dengan submodul (Alfian et al., 2022). Penelitian terkait submodul banyak dikaitkan dengan submodul prima (Juliana et al., 2021) hingga ke submodul hampir prima (Wardhana et al., 2016).

Gelanggang Noether ini ditemukan oleh seorang matematikawan jerman yang bernama Amalie Emmy Noether. Salah satu kasus khusus Gelanggang Noether adalah Daerah Dedekind, Maulana pada tahun 2022 telah memberikan beberapa sifat ideal dan gelanggang polinom pada Daerah Dedekind (Maulana, 2022), oleh karena itu pada artikel ini akan diangkat sifat serupa pada Gelanggang Noether.

METODE

Metode penelitian dari gelanggang Noether dilakukan dengan menggunakan pendekatan teori gelanggang dan aljabar abstrak. Pendekatan ini melibatkan pembelajaran tentang sifat-sifat khusus dari gelanggang Noether, seperti sifat ketelitian dan sifat Noetherian. Selain itu, metode penelitian juga melibatkan pembelajaran tentang ideal dan sifat-sifatnya, seperti ideal primer dan ideal maksimal, serta hubungannya dengan gelanggang Noether.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk memudahkan dalam penjelasan mengenai topik yang dibahas, diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan gelanggang Noether sebagai berikut.

Definisi 1 (Husni, 2022)

Suatu gelanggang $(R,+,\cdot)$ merupakan sebuah himpunan R yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian yang memenuhi:

1. $(R,+)$ adalah grup abelian
2. Asosiatif terhadap operasi perkalian yaitu $(ab)c = a(bc)$ untuk setiap $a, b, c \in R$.
3. Distributif kiri dan kanan yaitu $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ untuk setiap $a, b, c \in R$.

Definisi 2 (Facchini, 1998)

Misalkan R adalah gelanggang dan I adalah subhimpunan tak kosong dari R, maka :

1. I disebut ideal kiri dari R jika untuk setiap $a, b \in I$ dan $r \in R$ memenuhi $a - b \in I$ dan $ra \in I$
2. I disebut ideal kanan dari R jika untuk setiap $a, b \in I$ dan $r \in R$ memenuhi $a - b \in I$ dan $ar \in I$
3. I disebut ideal dari R jika memenuhi ideal kanan dan ideal kiri dari R.

Jika I adalah ideal dari R maka dapat dituliskan $I \trianglelefteq R$ atau $I \triangleleft R$ jika $I \neq R$.

Definisi 3 (F. Maulana et al., 2019)

Misalkan $I \trianglelefteq R$ maka $R/I = \{a + I : a \in R\}$ dibawah operasi $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$, $(a + I)(b + I) = (ab) + I$ untuk setiap $a, b \in R$ adalah gelanggang yang disebut dengan gelanggang kuosien.

Definisi 4 (Wardhana & Maulana, 2021)

Suatu ideal I dari gelanggang R dikatakan dibangun secara hingga jika terdapat $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ sedemikian sehingga $I = \langle r_1, r_2, \dots, r_n \rangle$.

Selanjutnya, penjelasan mengenai topik pembahasan yaitu gelanggang Noether adalah sebagai berikut.

Definisi 5 (Wardhana et al., 2021)

Suatu gelanggang R dikatakan memenuhi kondisi rantai naik pada idealnya jika setiap barisan naik $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$ ideal dari R-nya berhingga. Dengan kata lain terdapat suatu indeks k sedemikian sehingga $I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \cdots$. Selanjutnya, gelanggang yang memenuhi kondisi rantai naik pada ideal-idealnya dinamakan gelanggang Noether.

Contoh 1:

Gelanggang $\mathbb{Z}$ merupakan contoh gelanggang Noether karena idealnya memenuhi kondisi rantai naik.

Bukti :

Untuk menunjukkan $\mathbb{Z}$ adalah Noetherian, ambil suatu barisan naik $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{Z}$. Setiap ideal N_i adalah ideal yang terbentuk dari sebuah elemen $n_i \geq 0$ dan kondisi N_{i+1} sama saja dengan dikatakan n_{i+1} habis dibagi n_1, karena habis dibagi maka $n_{i+1} \leq n_1$, sehinga $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \cdots$.

Barisan tersebut terbatas di bawah, dengan batas bawah 0. Karena barisan tersebut terbatas kebawah di 0, maka barisan tersebut pasti berhenti pada sebuah titik yang sama (konstan), sehingga $n_R = n_{R+1} = \cdots$., dengan kata lain $N_R = N_{R+1} = \cdots$ sehingga $\mathbb{Z}$ memenuhi kondisi rantai naik diantara ideal – idealnya, jadi terbukti bahwa $\mathbb{Z}$ adalah gelanggang Noether. ■

Teorema 1

Suatu gelanggang R merupakan gelanggang Noether jika dan hanya jika setiap ideal dari R dibangun secara hingga.

Bukti :

$\Longrightarrow$ Akan dibuktikan jika R merupakan gelanggang Noether maka setiap ideal dari R dibangun secara hingga dengan menggunakan metode kontraposisi. Misalkan terdapat ideal I pada R yang bukan merupakan pembangun berhingga. Pilh $r_1 \in I$. Karena I bukan pembangun berhingga, sehingga $\langle r_1 \rangle \neq I$, maka diperoleh $r_2 \in I \setminus \langle r_1 \rangle$. Selanjutnya, $\langle r_1, r_2 \rangle \neq I$, maka diperoleh $r_3 \in I \setminus \langle r_1, r_2 \rangle$. Jika proses dilanjutkan maka akan diperoleh himpunan ideal tak berhingga $\langle r_1 \rangle \subseteq \langle r_1, r_2 \rangle \subseteq$

$\langle r_1, r_2, r_3\rangle \subseteq \cdots$, maka R bukan gelanggang Noether. Karena kontraposisinya bernilai benar jadi terbukti bahwa jika R gelanggang Noether maka setiap ideal dari R dibangun berhingga. ■

$\Leftarrow$ Misalkan setiap ideal pada R merupakan pembangun yang berhingga. Diberikan rantai $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$, diperoleh ideal

$$I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots$$

Diketahui bahwa I merupakan ideal pembangun yang berhingga, katakan $I = \langle r_1, r_2, \dots., r_n\rangle$, dengan $r \in I_{k_i}$.

$$n = maks\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$$

Maka $r_1, r_2, \dots, r_n \in I_K$, sehingga $I_n = I$. Akibatnya $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \cdots$. Karena terdapat indeks n sedemikian sehingga $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \cdots$ maka terbukti R merupakan gelanggang Noether. ■

Teorema 2

Misalkan R adalah gelanggang Noether dan $I \trianglelefteq R$ maka R/I juga merupakan gelanggang Noether.

Bukti :

Mengingat teori dasar homomorfisma

$$\pi : R \to R/I, x \to x + \ \ I$$

Misalkan $J \lhd R/I$. Akan ditunjukkan J dibangun secara hingga. Diketahui bahwa $\pi^{-1}\,(J)$ ideal dari R dan merupakan himpunan yang berhingga, karena R gelanggang Noether. Maka $\pi^{-1}\,(J) = \langle r_1,\ r_2, \dots, r_n\rangle$ untuk suatu $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$. Maka, J berhingga dengan $\pi(r_1), \pi(r_2), \dots \pi(r_n)$. Jadi, R/I adalah gelanggang Noether. ■

Teorema 3

Misalkan R adalah gelanggang Noether maka $R[x]$ juga merupakan gelanggang Noether.

Bukti :

Misalkan $a \subseteq R[x]$ adalah ideal yang dibangun secara tak hingga. Maka, dengan pengulangan, terdapat barisan $\{f_0, f_1, \dots\} \subset a$ sedemikian sehingga jika b_n dengan $n \geq 1$ adalah ideal berhingga dengan $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$, maka $f_n \in a \setminus b_n$ adalah derajat minimum. Jelas bahwa $\{\deg(f_0)\,, \deg(f_1)\,, \dots\}$ tidak mengurangi barisan dari bilangan bulat positif. Misalkan a_n merupakan *leading coefficient* dari f_n dan b ideal pembangun R dengan $a_0, a_1, \dots$ karena R gelanggang Noether rantai ideal $\langle a_0\rangle \subset \langle a_0, a_1\rangle \subset \langle a_0, a_1, a_2\rangle \subset \cdots$ yang terbatas. Misalkan $b = \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\rangle$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$. Maka diperoleh,

$$a_n = \sum_{i<n}\sum_{j-1}^{n_i} u_{i,j}a_i v_{i,j}, \quad u_{i,j}, v_{(i,j)} \in R$$

dengan penjumlahan berhingga, selanjutya

$$g = \sum_{i<n}\sum_{j=1}^{n_i} u_{i,j}x^{\deg(f_n)-\deg(f_i)}f_i v_{i,j} \in b_n$$

Dengan pangkat tertinggi sama dengan pangkat f_n, sedangkan f_n bukan anggota b_n, dengan kata lain $f_n - g \in a \setminus b_n$ memiliki derajat lebih rendah dari f_n sehingga kontradiksi dengan pernyataan bahwa $f_n \in a \setminus b_n$ adalah derajat minimum. Dengan demikian $a \subseteq R[x]$ adalah ideal yang dibangun secara hingga. Jadi terbukti $R[x]$ merupakan gelanggang Noether. ■

KESIMPULAN

1. Gelanggang R dikatakan gelanggang Noether jika dan hanya jika setiap ideal dari R dibangun secara hingga.
2. R adalah gelanggang Noether dan I ideal dari R maka R/I juga merupakan gelanggang Noether.
3. Misalkan R adalah gelanggang Noether maka $R[x]$ juga merupakan gelanggang Noether.

DAFTAR PUSTAKA

Alfian, M. R., Wardhana, I. G. A. W., Maulana, F., Switrayni, N. W., Aini, Q., & Putri, D. N. (2022). Prime submodul of an integer over itself. *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, 27–30. https://doi.org/10.29303/emj.v5i1.132

Facchini, A. (1998). *Module Theory: Endomorphism Rings and Direct Sum Decompositions in Some Classes of Modules* (1st ed., Vol. 1). Birkhauser.

Husni, M. N. (2022). Diagonalisasi Operator Linear. *UJMC (Unisda Journal of Mathematics and Computer Science)*, *8*(2), 7–13.

Juliana, R., Wardhana, I. G. A. W., & Irwansyah. (2021). Some Characteristics of Cyclic Prime, Weakly Prime and Almost Prime Submodule of Gaussian Integer Modulo over Integer. *AIP Conference Proceedings*, *2329*(February). https://doi.org/10.1063/5.0042586

Maulana, F., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2019). Ekivalensi Ideal Hampir Prima dan Ideal Prima pada Bilangan Bulat Gauss. *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, *1*(1), 1. https://doi.org/10.29303/emj.v1i1.29

Maulana, M. (2022). IDEAL PRIMA PADA DAERAH DEDEKIND BERUPA POLINOM FAKTOR BERDERAJAT SATU DARI RING BILANGAN BULAT. *Fraktal: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, *3*(2), 65–69.

Switrayni, N. W., Wardhana, I. G. A. W., & Aini, Q. (2022). ON CYCLIC DECOMPOSITION OF Z-MODULE M m×r (Z n). *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, *5*(1), 47–51. https://doi.org/10.14710/jfma.v5i1.12699

Wardhana, I. G. A. W. (2022). The Decomposition of a Finitely Generated Module over Some Special Ring. *JTAM (Jurnal Teori Dan Aplikasi Matematika)*, *6*(2), 261–267. https://doi.org/10.31764/jtam.v6i2.6769

Wardhana, I. G. A. W., Astuti, P., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2016). On almost prime submodules of a module over a principal ideal domain. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, *38*(2), 121–128. https://doi.org/10.17654/NT038020121

Wardhana, I. G. A. W., & Maulana, F. (2021). *Sebuah Karakteristik dari Modul Uniserial dan Gelanggang Uniserial*. *7*, 9–17.

Wardhana, I. G. A. W., Nghiem, N. D. H., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2021). A note on almost prime submodule of CSM module over principal ideal domain. *Journal of Physics: Conference Series*, *2106*(1), 012011. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2106/1/012011