Fraktal: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Volume 2, No. 1, Mei 2021, Hal. 54-63
Available online at https://ejurnal.undana.ac.id/fraktal
Doi: https://doi.org/10.35508/fractal.v2i1.4039

MODEL PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU UNTUK MASALAH KINEMATIKA GARIS LURUS

Ofirenty Elyada Nubatonis

Pendidikan Matematika, FKIP Universitas Nusa Cendana, Kupang
Email: Ofirenty@staf.undana.ac.id

Diterima (18 April 2021); Revisi (26 April 2021); Diterbitkan (21 Mei 2021)

Abstrak

Dalam sejarah pemodelan matematika, persamaan diferensial muncul sebagai salah satu alat untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam kehidupan manusia termasuk pengembangan teori dalam matematika. Dalam penelitian ini akan dikonstruksi model-model persamaan diferensial untuk masalah kinematika garis lurus. Metode yang digunakan adalah metode kajian pustaka. Model-model persamaan diferensial yang diperoleh adalah (1) Persamaan diferensial $dx = vdt$ dengan syarat awal $x(0) = x_0$ adalah model persamaan diferensial untuk menyatakan masalah perubahan posisi benda setiap saat waktu *t*. Integrasi model ini akan menghasilkan persamaan posisi suatu benda, (2) persamaan $dv = adt$ dengan syarat awal $v(0) = v_0$ yang menyatakan perubahan kecepatan setiap saat *t*. Integrasi dari model ini akan menghasilkan persamaan kecepatan suatu benda yang bergerak pada lintasan lurus, (3) Persamaan $mdv = kFdt$ untuk menyatakan hukum Newton Kedua dan dengan syarat awal $v(0) = v_0$ maka dengan integrasi akan menghasilkan persamaan kecepatan yang mempertimbgkan massa benda dan resultan gaya yang diberikan, (4) persamaan $\frac{dv}{dt} = g$ dengan syarat awal $v(0) = v_0$ sehingga dengan integrasi akan menghasilkan persamaan kecepatan untuk benda jatuh bebas dan (5) persamaan diferensial biasa linear orde satu $m\frac{dv}{dt} = mg - cv$ dan persamaan diferensial Bernoulli $m\frac{dv}{dt} = mg - cv^2$ untuk menyatakan perubahan kecepatan suatu benda jatuh bebas yang dipengaruhi oleh gaya gesek udara.

Kata kunci: Diferensial, Gerak, Kecepatan, Kinematika, Percepatan, Persamaan

Abstract

In the history of mathematical modeling, differential equations emerged as a tool to solve various problems in human life, including the development of theories in mathematics. In this research, differential equation models will be constructed for straight line kinematics problems. The method used is the literature review method. The differential equation models obtained are (1) The differential equation $dx = vdt$ with the initial condition $x(0) = x_0$ is a differential equation model to express the problem of changing the position of the object at time t. The integration of this model will produce an equation for the position of an object, (2) the equation $dv = adt$ with the initial condition $v(0) = v_0$which states the change in velocity at any time *t*. The integration of this model will produce an equation for the velocity of an object moving in a straight path, (3) The equation $mdv = kFdt$ to express Newton's Second Law and with the initial condition $v(0) = v_0$ then the integration will produce a velocity equation that takes into account the mass of the object and the resultant force is given, (4) the equation $\frac{dv}{dt} = g$ with the initial condition $v(0) = v_0$ so that the integration will produce a velocity equation for free falling objects and (5) a first order linear ordinary differential equation $m\frac{dv}{dt} = mg - cv$ and Bernoulli's differential equation $m\frac{dv}{dt} = mg - cv^2$ to express the change in the velocity of an object in free fall which is affected by air friction.

Keywords: acceleration, differential, equation, kinematics, motion, velocity

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan-turunan satu varibel terikat terhadap satu atau lebih variabel terikat. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau beberapa fungsi yang tak diketahui yang mana fungsi tak diketahui ini adalah solusi dari persamaan diferensial yang diberikan yang harus dicari. Persamaan ini terbagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa atau persamaan diferensial yang terdiri dari satu variable bebas dan turunannya terhadap variabel tersebut dan persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang terdiri dari lebih dari satu variabel bebas.

Meskipun persamaan itu seharusnya disebut “persamaan turunan “ namun istilah “persamaan diferensial “ (equatio differentialis) yang diperkenalkan oleh Leibniz dalam tahun 1676 sudah umum digunakan (Finizio dan Ladas, 1982). Studi mengenai persamaan diferensial dimulai segera setelah penemuan Kalkulus dan Integral. Menurut Nuryadi (2018), pada tahun 1676 Newton menyelesaikan sebuah persamaan diferensial dengan menggunakan deret tak hingga, sebelas tahun setelah penemuannya tentang bentuk fluksional dari kalkulus diferensial pada tahun 1665. Newton tidak mempublikasikan hal tersebut sampai dengan tahun 1693, pada saat Leibniz menghasilkan rumusan persamaan diferensial yang pertama. Dalam sejarah perkembangan pemodelan matematika, persamaan diferensial turut hadir dalam memecahkan fenomena-fenomena kehidupan manusia, masalah sosial, masalah kesehatan, ekosistem dan peradaban dunia serta masih banyak masalah lainnya.

Dalam Fisika, persamaan diferensial digunakan dalam studi tentang gerak partikel, analisis rangkaian listrik, mekanika kuantum dan mekanika continuum, teori tentang difusi dan aliran panas,teori elekromagnetik serta teori tentang vibrasi dan bunyi. Hukum Newton II tentang gerak benda dengan yang berbunyi percepatan a yang dihasilkan berbanding lurus dengan gaya F yang diberikan dan berbanding terbalik dengan massa benda m atau dapat ditulis dalam persamaan $F = ma$. Percepatan a ini dapat ditulis sebagai $\frac{dv}{dt}$ dengan v adalah kecepatan benda atau dapat pula ditulis sebagai $\frac{d^2x}{dt^2}$ dengan x adalah posisi benda, dimana $\frac{dv}{dt}$ dan $\frac{d^2x}{dt^2}$ yang kita dapatkan ini adalah turunan-turunan pertama dan kedua dari suatu variabel terikat terhadap variabel bebas. Bentuk-bentuk ini dapat dikonstruksi menjadi suatu persamaan diferensial berdasarkan masalah yang akan diselesaika . Ataupun, kecepatan panas atau kalor Q yang mengalir keluar melalui jendela atau sebuah pipa air panas sebanding dengan luasnnya permukaan pipa A dan perubahan temperature T

Volume 2, No. 1, Mei 2021, Hal. 1-x
Doi: https://doi.org/10.35508/fractal.v2i1.4039

terhadap jarak yang ditempuh *x*. Persamaan diferensial yang kita dapatkan dari masalah ini adalah $\frac{dQ}{dt} = kA\frac{dT}{dx}$ yang merupakan persamaan diferensial dalam turunan variabel terikat *Q* terhadap variabel bebas *t* dan variabel terikat *T* terhadapa variabel bebas *x*. Dari $\frac{dQ}{dt}$ dan $\frac{dT}{dx}$,yang dalam menyelesaikannya kita akan mencari fungsi $T(x)$ dan fungsi $Q(t)$.

Kemudian, dalam Rifanti, dkk (2019) menjelaskan pemodelan persamaan diferensial pada rangkaian listrik sederhana yang terdiri dari hambatan R ohm, sebuah induktor L henry dan sebuah kapasitor C. dalam masalah ini kita akan mencari kuat arus listrik *I* sebagai fungsi waktu *I(t)* dan fungsi muatan *Q(t)* di dalam kapasitor pada setiap saat t, maka menurut definisi

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}$$

Diketahui pula bahwa arus *I* mengalami penurunan tegangan melalui resistor sebesar $\frac{Q}{C}$ sehingga setiap saat waktu t kita akan dapatkan

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = V(t)$$

Dengan menggunakan hubungan $I = \frac{dQ}{dt}$ kita dapatkan

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V(t)$$

Persamaan – persamaan yang kita dapatkan ini merupakan bentuk – bentuk dari persamaan diferensial orde satu dan orde dua. Dengan menyelesaikan persamaan ini kita akan dapatkan sutu fungsi $Q(t)$ dan $I(t)$.

Masalah – masalah di atas merupakan masalah yang diformulasikan kedalam persamaan diferensial. Langkah selanjutnya adalah menyelesaiakan persamaan diferensial itu untuk mendapatkan fungsi – fungsi yang tidak diketahui dari persamaan diferensial tersebut.

Dalam memformulasikan suatu masalah ke persamaan diferensial, langkah yang pertama yang harus dibuat adalah membuat asumsi sederhana sehingga persamaan diferensial yang dihasilkanpun mudah untuk dikerjakan. Dalam penentuan asumsi ini haruslah menggambarkan kondisi atau keadaan nyata masalah tersebut. Sekali model matematika tersusun dalam persamaan diferensial langkah selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan diferensial itu dan mengunakan penyelesaiannya untuk memperkirakan masalah sebenarnya. Jika dalam hal perkiraan itu tidak sesuai dengan keadaan nyata maka kita harus mengubah asumsi untuk mengarahkannya dan mengusahakan membentuk suatu model matematika yang lebih mendekati kenyataan. Oleh karena

Volume 2, No. 1, Mei 2021, Hal. 1-x
Doi: https://doi.org/10.35508/fractal.v2i1.4039

itu, dalam penelitian ini akan dikaji model persamaan diferensial biasa orde satu untuk masalah kinematika gerak lurus.

METODE

Metode penelitian ini adalah penelitian kajian pustaka atau studi kepustakaan yang bertujuan mengkonstruksi teori-teori atau konsep-konsep sesuai dengan masalah penelitian. Masalah yang dikaji dalam penelitian ini adalah membangun persamaan diferensial untuk beberapa konsep kinematika gerak lurus.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Kinematika Gerak Lurus

Kinematika gerak dalam pelajaran fisika membahas besaran-besaran kinematis yang memperngaruhi gerak benda, dimana meliputi lintasan, kecepatan dan percepatan (Wijayanto & Susilawati, 2015). Kinematika gerakan ini digambarkan dengan menyatakan posisi, kecepatan dan percepatan benda setiap waktu pada lintasan lurus. Suatu benda bergerak lurus jika lintasan gerak benda tersebut berupa garis lurus.

Model Persamaan Diferensial untuk Kecepatan

Suatu benda bergerak dari titik Q ke Q' dengan perpindahan Δx dalam selang waktu Δt maka kecepatan rata-rata benda selama selang waktu ini adalah besarnya perpindahan benda terhadap waktu yang dinyatakan sebagai

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

dengan $\bar{v}$ = kecepatan rata-rata.

Jika diambil Δt semakin kecil, besarnya Δx menjadi semakin kecil pula. Akibatnya,kecepatan sesaat dapat didefinisikan sebagai $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ atau dapat ditulis

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad (1)$$

Persamaan (1) adalah persamaan diferensial orde satu dapat ditulis kembali sebagai

$$dx = vdt \qquad (2)$$

dengan v adalah konstanta. Dengan mengintegralkan persamaan ini maka diperoleh solusi umum $x(t) = vt + C$ yang menyatakan persamaan gerak benda pada lintasan lurus.

Jika saat awal $t = 0$ jarak tempuh x_0 maka masalah nilai awal untuk masalah ini menjadi

$$dx = vdt, \qquad x(0) = x_0 \qquad (3)$$

Volume 2, No. 1, Mei 2021, Hal. 1-x
Doi: https://doi.org/10.35508/fractal.v2i1.4039

Masalah nilai awal (3) adalah persamaan diferensial yang menggambarkan perubahan jarak setiap waktu t yang mempunyai solusi tunggal yang memenuhi syarat awal yang diberikan. Solusi dari masalah nilai awal (3) adalah

$$x(t) = vt + x_0 \tag{4}$$

adalah persamaan jarak untuk setiap saat t dengan v adalah konstanta. Persamaan (4) juga merupakan persamaan yang menyatakan posisi suatu partikel. Posisi-posisi benda setiap saat t membentuk sebuah garis lurus.

Model Persamaan Diferensial untuk Percepatan

Andaikan kecepatan benda diketahui dari titik Q ke Q', maka percepatan rata-rata benda selama selang waktu Δt didefinisikan sebagai

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

dimana $\bar{a}$ adalah percepatan rata-rata, Δv menyatakan selisih kecepatan selama selang waktu Δt yaitu $\Delta v = v - v'$. Percepatan sesaat pada saat t didapatkan dengan mengambil Δt semakin kecil dan Δv akan semakin kecil juga sehingga

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{5}$$

Dengan mensubsitusikan persamaan ini kedalam persamaan (1) maka akan diperoleh

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{6}$$

Bila a adalah kontanta maka persamaan (5) dapat ditulis kembali sebagai persamaan diferensial orde satu

$$dv = adt \tag{7}$$

dengan diintegrasi akan diperoleh solusi umum

$$v(t) = at + C \tag{8}$$

dimana a dan C adalah konstanta

Pada saat awal $t=0$ bila kecepatan awalnya adalah v_0 maka diperoleh masalah nilai awal

$$dv = adt, \qquad v(0) = v_0 \tag{9}$$

Masalah nilai awal (9) adalah masalah perubahan kecepatan suatu benda setiap saat t yang mempunyai satu solusi yang memenuhi syarat awal yang diberikan. Integrasi masalah nilai awal (9) akan diperoleh solusi

$$v(t) = at + v_0 \tag{10}$$

Volume 2, No. 1, Mei 2021, Hal. 1-x
Doi: https://doi.org/10.35508/fractal.v2i1.4039

yang adalah persamaan kecepatan untuk setiap saat *t* yang menghubungkan antara waktu, kecepatan dan percepatan.

Masalah-masalah yang dibahas ini tidak lain adalah suatu Masalah Nilai Awal yang merupakan model matematika yang layak untuk suatu keadaan fisik yaitu gerak partikel pada lintasan lurus yang mempunyai suatu penyelesaian (ujud) dan hanya ada satu penyelesaian (tunggal).

Hukum Newton II

Selanjutnya masalah kecepatan benda ini diasumsikan dengan Hukum Newton Kedua. Dalam Ross, L Shepley (2004) dikemukakan Hukum Newton Kedua tentang Gerak menyatakan bahwa *laju perubahan momentum berbanding lurus dengan jumlah gaya yang bekerja pada benda itu dan dalam arah jumlah gaya itu.* Sedangkan momentum suatu benda adalah hasil kali massa benda dan kecepatannya (Purwanto, 2014).

Jika F adalah jumkah gaya yang bekerja pada benda, maka persamaan diferensial yang dapat dikonstruksi dari asumsi berdasarkan hukum di atas adalah

$$\frac{d}{dt}(mv) = kF, \tag{11}$$

Dengan k adalah suatu konstanta perbandingan. Jika massa benda itu konstan maka

$$m\frac{dv}{dt} = kF \tag{12}$$

Terlihat bahwa gerak dari setiap benda ditunjukkan oleh persamaan diferensial biasa orde satu yaitu persamaan diferensial variabel terpisah. Pemisahan variabel pada persamaan (12) diperoleh

$$mdv = kFdt \tag{13}$$

Integrasikan persamaan (13) akan diperoleh solusi umum

$$mv(t) = kFt + C \tag{14}$$

adalah persamaan kecepatan untuk setiap saat *t* dengan *m, k , F* dan *C* adalah konstanta.

Jika kondisi awal saat $t = 0$ kecepatan benda adalah v_0 maka persamaan diferensial (12) dengan kondisi awal ini ditulis

$$m\frac{dv}{dt} = kF \qquad v(0) = v_0 \tag{15}$$

Persamaan (15) adalah masalah nilai awal yang menyatakan perubahan kecepatan benda setiap waktu dan memiliki solusi tunggal

$$mv(t) = kFt + v_0 \tag{16}$$

Persamaan (16) adalah persamaan kecepatan yang menghubungkan antara kecepatan gerak benda dengan massa benda, gaya benda dan waktu.

Volume 2, No. 1, Mei 2021, Hal. 1-x
Doi: https://doi.org/10.35508/fractal.v2i1.4039

Benda Jatuh Bebas

Dalam Ross, L Shepley (2004), masalah sebuah benda yang dijatuhkan dari ketinggian tertentu diasumsikan sebagai benda jatuh bebas hanya dipengaruhi oleh gaya berat benda. Hal ini berarti bahwa gaya yang bekerja pada benda tersebut adalah berat benda W, dengan $W = mg$ dengan g adalah gaya gravitasi yang konstan.

Persamaan diferensial untuk Hukum Newton kedua adalah

$$m\frac{dv}{dt} = F \tag{12}$$

dimana F adalah resultan gaya yang bekerja pada benda tersebut.

Dengan demikian berdasarkan asumsi bahwa gaya yang bekerja adalah berat benda pada benda jatuh bebas maka persamaan (12) diubah menjadi

$$m\frac{dv}{dt} = W$$

atau

$$\frac{dv}{dt} = g \tag{17}$$

Persamaan diferensial (17) adalah persamaan diferensial orde satu bentuk variabel terpisah yang menyatakan bahwa perubahan kecepatan suatu benda jatuh bebas setiap waktu berbanding lurus dengan gaya grafitasi bumi. Karena g adalah konstanta maka solusi umum dari persamaan (17) adalah

$$v(t) = gt + C \tag{18}$$

Bila pada kondisi awal yakni saat $t = 0$ kecepatan benda tersebut adalah v_0 maka persamaan diferensial (17) dengan syarat awal ini ditulis

$$\frac{dv}{dt} = g \qquad v(0) = v_0 \tag{19}$$

Persamaan (19) adalah masalah nilai awal untuk masalah perubahan kecepatan benda jatuh bebas dengan solusi khusus tunggal

$$v(t) = gt + v_0 \tag{20}$$

yang adalah persamaan kecepatan benda jatuh bebas setiap waktu.

Pada masalah benda jatuh bebas ini terdapat masalah tertentu seperti masalah terjun payung, perlu juga diperhitungkan gaya yang berlawanan F_R seperti gaya gesekan udara yang dialami para tentara terjun payung. Resultan gaya yang bekerja Berat $W = mg$ dipengaruhi oleh gesekan udara. Pada peristiwa ini adalah gaya berat yang dimbangi oleh gaya gesekan udara F_R sehingga persamaan diferensial untuk masalah ini dapat ditulis

Volume 2, No. 1, Mei 2021, Hal. 1-x
Doi: https://doi.org/10.35508/fractal.v2i1.4039

$$m\frac{dv}{dt} = mg - F_R \tag{21}$$

Bila *m, g,* dan F_R adalah konstanta maka persamaan (21) adalah persamaan diferensial variabel terpisah dengan solusi umum

$$v(t) = (m^2 g - mF_R)t + C$$

dengan *C* adalah sebarang konstanta.

Selanjutnya, menurut Yuningsih dan Sardjito (2020) jika gesekan udara harus diperhitungkan, untuk benda yang bergerak jatuh bebas, bekerja gaya gravitasi dan gesekan udara, di mana besarnya gaya gesekan sebanding dengan kuadrat kecepatan (v^2), tetapi arahnya berlawanan dengan kecepatan, sehingga total gaya vertikal yang bekerja pada benda adalah:

$$F = mg - cv^2$$

Atau jika $F_R = cv$ atau $F_R = cv^2$ dimana c adalah konstanta positif yang nilainya sangat bergantung pada sifat-sifat medium. Dengan demikian diperoleh suatu bentuk persamaan diferensial untuk masalah ini adalah persamaan diferensial

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv, \qquad c > 0 \tag{22}$$

atau persamaan diferensial

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv^2, \qquad c > 0 \tag{23}$$

Persamaan (22) dapat ditulis kembali menjadi

$$m\frac{dv}{dt} + cv = mg \tag{24}$$

adalah persamaan diferensial biasa linear orde satu dengan solusi umumnya berbentuk

$$v = e^{-\int \frac{c}{m}dt}\left[\int e^{\int \frac{c}{m}dt}\, g dt + K\right]$$

atau

$$v = \frac{mg}{c} + Ke^{-\frac{c}{m}t}$$

adalah solusi persamaan kecepatan untuk gerak benda jatuh bebas dengan memperhitungkan gaya gesekan udara dengan *K* adalah sebarang konstantan. Sehingga bila perubahan kecepatan benda jatuh bebas dengan memperhitungkan gaya gesek udara yang digambarkan dengan persamaan diferensial (22) dan benda bergerak dengan kecepatan awal v_0 pada saat $t = 0$ maka solusi khusus dari persamaan (22) dengan syarat awal ini adalah

$$v = \frac{mg}{c} + (v_0 - mg)e^{-\frac{c}{m}t}$$

Sedangkan, bentuk (23) adalah persamaan diferensial Bernoulli yang dapat ditulis kembali

Volume 2, No. 1, Mei 2021, Hal. 1-x
Doi: https://doi.org/10.35508/fractal.v2i1.4039

$$\frac{dv}{dt} - g = -\frac{c}{m}v^2 \tag{26}$$

Kedua ruas persamaan (26) dikalikan dengan v^{-2} diperoleh

$$v^{-2}\frac{dv}{dt} - gv^{-2} = -\frac{c}{m} \tag{27}$$

Lalu dengan transformasi $y = v^{-1}$ dan $\frac{dy}{dt} = -v^{-2}\frac{dv}{dt}$ sehingga persamaan (27) ditransformasi menjadi persamaan diferensial biasa linear orde satu

$$\frac{dy}{dt} - gy = -\frac{c}{m} \tag{28}$$

Penyelesaian dari persamaan (28) berbentuk

$$y = e^{-\int g dt}\left[\int -\frac{c}{m}e^{\int g dt}dt + K\right]$$

atau

$$y = -\frac{c}{mg} + Ke^{-gt} \tag{29}$$

Selanjutnya dengan transformasi kembali $y = v^{-1}$ mengubah persamaan (29) menjadi

$$v = \frac{mg}{-c+Kmge^{-gt}} \tag{30}$$

adalah persamaan kecepatan benda jatuh bebas dengan memperhatikan faktor gesekan udara yang diinterpretasikan dalam persamaan diferensial (23) dengan *K* adalah sebarang konstanta. Bila pada kondisi ini berlaku bahwa kecepatan awal saat *t=0* adalah v_0 maka solusi khusus dari persamaan diferensial (23) yang memenuhi syarat awal tersebut adalah

$$v = \frac{mg}{-c + \frac{mg + v_0c}{v_0}e^{-gt}}$$

KESIMPULAN

Dalam penelitian ini dikaji tentang model persamaan diferensial untuk masalah-masalah kinematika gerak lurus. Persamaan diferensial yang dikonstruksi berdasarkan asumsi-asumsi hukum gerak lurus adalah persamaan diferensial biasa orde satu. Model-model persamaan diferensial yang diperoleh adalah (1) Persamaan diferensial $dx = vdt$ dengan syarat awal $x(0) = x_0$ adalah model persamaan diferensial untuk menyatakan masalah perubahan posisi benda setiap saat waktu *t*. Integrasi model ini akan menghasilkan persamaan posisi suatu benda, (2) persamaan $dv = adt$ dengan syarat awal $v(0) = v_0$ yang menyatakan perubahan kecepatan setiap saat *t*. Integrasi dari model ini akan menghasilkan persamaan kecepatan suatu benda yang bergerak pada lintasan lurus, (3) Persamaan $mdv = kFdt$ untuk menyatakan hukum Newton Kedua dan dengan syarat awal $v(0) = v_0$ maka dengan integrasi akan menghasilkan persamaan kecepatan yang

Volume 2, No. 1, Mei 2021, Hal. 1-x
Doi: https://doi.org/10.35508/fractal.v2i1.4039

mempertimbgkan massa benda dan resultan gaya yang diberikan, (4) persamaan $\frac{dv}{dt} = g$ dengan syarat awal $v(0) = v_0$ sehingga dengan integrasi akan menghasilkan persamaan kecepatan untuk benda jatuh bebas dan (5) persamaan diferensial biasa linear orde satu $m\frac{dv}{dt} = mg - cv$ dan persamaan diferensial Bernoulli $m\frac{dv}{dt} = mg - cv^2$ untuk menyatakan perubahan kecepatan suatu benda jatuh bebas yang dipengaruhi oleh gaya gesek udara.

DAFTAR PUSTAKA

Finizio. N & Ladas. G. (1982). *An introduction to differential equation with diferennce equation , forier analysis, and partial equation*. New York: McGraw-Hill,

Joko, Purwanto. (2014). Hukum newton tentang gerak dalam ruang fase tak komutatif. *Jurnal J. Kaunia* 10(1), 30-35

Nuryadi. (2018). Pengantar persamaan diferensial elementer dan penerapananya (Online). Yogyakarta: Universitas Mercubuana. Tersedia pada http://lppm.mercubuana-yogya.ac.id/wp-content/uploads/2019/01/Nuryadi_Buku-Ajar_Pengantar-Persamaan-Diferensial-dan-Aplikasinya_2018.pdf . Diakses pada 15 April 2021.

Rifanti, M. U, dkk. (2019). Model matematika arus listrik dengan persamaan diferensial metode koefisien tak tentu. *Jurnal Matematika Integratif*, 15(1), 1 – 8.

Ross, L. S. (2004). Differential Equation. Delhi : Rajiv Book Binding House.

Wijayanto & Susilawati. (2015). Rancangan kinematika gerak menggunakan alat eksperimen air track untuk media pembelajaran fisika berbasis video. *Jurnal Informatika UPGRIS*, 1(2), 132-139

Yuningsih, Nani, & Sardjito. (2020). Gerak vertikal benda berukuran berbeda yang jatuh tanpa kecepatan awal dan bergesekan dengan udara. *Prosiding The 11th Industrial Research Workshop and National Seminar Bandung*, 710-714