Fraktal: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Volume 3, No. 2, November 2022, Hal. 1-8 (e-ISSN 2776-0073)
Available online at https://ejurnal.undana.ac.id/fraktal

KARAKTERISTIK GRAF PEMBAGI NOL PADA GELANGGANG BILANGAN BULAT MODULO

Rina Juliana

Matematika, FMIPA Universitas Mataram, Mataram.
Email: rina.juliana@unram.ac.id

Abstrak

Graf pembagi nol merupakan salah satu bentuk representasi geometri dari gelanggang komutatif. Graf pembagi nol dari gelanggang R yang dinotasikan dengan Γ_R, didefinisikan sebagai graf yang himpunan simpulnya terdiri dari semua elemen himpunan pembagi nol dari suatu gelanggang komutatif R, dan dua simpul a dan b akan bertetangga jika dan hanya jika $ab = 0$. Pada tulisan ini, akan dibahas beberapa karakteristik graf pembagi nol pada gelanggang bilangan bulat modulo ($\mathbb{Z}_n$). Tujuan dari penelitian ini ialah untuk mengetahui bentuk-bentuk graf pembagi nol dari gelanggang bilangan bulat modulo ($\mathbb{Z}_n$) dan beberapa sifatnya. Metode yang digunakan dalam penelitian ini ialah *deductive proof*, dilakukan dengan mencari beberapa contoh graf pembagi nol dari gelanggang bilangan bulat modulo ($\mathbb{Z}_n$), kemudian merumuskan karakteristik dari beberapa contoh tersebut secara umum. Hasil pertama yang diperoleh ialah Ketika $n = p^2$ dengan p bilangan prima ganjil, diperoleh graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ yaitu graf lengkap. Hasil kedua ialah ketika $n = p_1 p_2$, dengan p_1 dan p_2 bilangan prima berbeda, maka graf pembagi nol dari $\mathbb{Z}_n$ adalah graf bipartit lengkap, dan diameter dari graf tersebut ialah 2.
Kata kunci: graf pembagi nol, gelanggang bilangan modulo, graf lengkap, graf bipartit

Abstract

Zero-divisor graph is a geometric representation of a commutative ring. Zero-divisor graph of ring R that denoted by Γ_R, defined by a graph whose vertices are all elements of zero-divisor set of a ring R, and two distinct vertices a and b are adjacent if and only if $ab = 0$. In this paper, we will study some of the characterizations of the zero-divisor graph of integers modulo ring ($\mathbb{Z}_n$). This study aims to know some forms of zero-divisor graph of ring ($\mathbb{Z}_n$) and its properties. The method that used in this paper is deductive proof, by taking some example of zero-divisor graph of integer modulo ring ($\mathbb{Z}_n$), then generalized the characterization of example. The firts result is if $n = p^2$, with p is a odd prime number, then the zero-divisor graph of ring $\mathbb{Z}_n$ is a complete graph. Then the second result is if $n = p_1 p_2$, with p_1 and p_2 are different prime numbers, then the zero-divisor graph of ring is a complete bipartite graph and the diameter is 2.
Keywords: zero-divisor graph, integers modulo ring, complete graph, bipartite graph

PENDAHULUAN

Studi mengenai graf menjadi topik bahasan yang cukup menarik belakangan ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah atau titik, dan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau sisi. Graf dapat dipakai dalam berbagai disiplin ilmu maupun dalam kehidupan sehari-hari. Penggunaan graf pada berbagai bidang tersebut adalah untuk memodelkan permasalahan, misalnya memodelkan rangkaian listrik, isomer senyawa kimia karbon, dan pengujian program. Matematikawan juga menggunakan graf dan sifat-sifatnya dalam merepresentasikan suatu struktur aljabar, salah satunya gelanggang. Gelanggang merupakan suatu himpunan tak kosong yang membentuk grup komutatif terhadap operasi penjumlahan serta bersifat asosiatif dan tertutup terhadap operasi perkalian.

Graf pembagi nol dinotasikan dengan Γ_R, didefinsikan sebagai graf yang himpunan simpulnya terdiri dari semua elemen himpunan pembagi nol dari suatu gelanggang komutatif R, dan dua simpul a dan b akan bertetangga jika dan hanya jika $ab = 0$ (Nazzal & Ghanem, 2014). Adapun penelitian terkait mengenai graf pembagi nol yaitu penelitian yang dilakukan oleh (Wicaksono& Sholeha, 2013), yang mengkaji bentuk graf pembagi nol dari beberapa gelanggang komutatif. Hasil yang diperoleh ialah konstruksi bentuk graf pembagi nol dari gelanggang yang himpunan pembagi nolnya berupa ideal penghilang dan beberapa kasus ketika graf yang terbentuk graf bintang dan graf lengkap. Hal inilah yang menarik penulis untuk mengetahui tentang sifat-sifat graf pembagi nol dari suatu gelanggang spesifik yang belum dikaji, seperti gelanggang bilangan bulat modulo. Sehingga pada tulisan ini, akan dibahas beberapa karakteristik graf pembagi nol dari suatu gelanggang komutatif, yaitu gelanggang bilangan bulat modulo ($\mathbb{Z}_n$).

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Deductive Proof*, yaitu dengan membuat konjektur berdasarkan sifat-sifat yang sudah ada kemudian dibuktikan dengan *rigorous proof*. Langkah pertama yang dilakukan adalah mengkaji definisi dan teori mengenai graf pembagi nol dan gelanggang bilangan bulat modulo. Selanjutnya, yaitu mengkaji beberapa contoh dan membahas beberapa karakteristik dari graf pembagi nol pada gelanggang bilangan bulat modulo.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Beberapa teori yang mendasari penelitian ini, ialah teori gelanggang dan graf. Suatu gelanggang adalah struktur aljabar dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang memenuhi beberapa kondisi. Definisi berikut menjelaskan hal tersebut lebih jauh.

Definisi 1 (Smith, 2016)

Sebuah gelanggang $(R, +, .)$ adalah himpunan R dengan operasi biner tambah dan perkalian, yang didefinisikan pada sehingga memenuhi :

- $(R, +)$ adalah grup abelian
- operasi perkalian bersifat asosiatif, yakni $a(bc) = (ab)c$ untuk setiap $a, b, c \in R$
- $\forall a, b, c \in R$, hukum distribusi kiri $a(b + c) = ab + ac$, dan hukum distribusi kanan $(b + c)a = ba + ca$ berlaku.

Suatu gelanggang dikatakan komutatif apabila terhadap operasi perkaliannya berlaki sifat komutatif.

Definisi 2 (Smith, 2016)

Sebuah gelanggang R disebut gelanggang komutatif apabila berlaku $ab = ba$, untuk setiap $a, b \in R$.

Pada gelanggang, terdapat suatu elemen yang menarik untuk dikaji karena mempunyai sifat seperti bilangan nol, dan dinamakan pembagi nol.

Definisi 3 (Fraleigh, 2014)

Misalkan R suatu gelanggang. Suatu elemen tak nol $a \in R$ disebut elemen pembagi nol jika terdapat suatu unsur tak nol $b \in R$ sehingga $ab = 0$. Himpunan semua pembagi nol dari gelanggang R disimbolkan dengan $Z(R)$. Gelanggang yang tidak memiliki elemen pembagi nol disebut daerah integral.

Pada struktur aljabar grup terdapat substruktur yang dinamakan subgroup, maka pada gelanggang juga terdapat substruktur yang dinamakan ideal.

Definisi 4 (Fraleigh, 2014)

Sebuah subhimpunan I dari gelanggang R dikatakan suatu ideal apabila I merupakan grup abelian terhdapat operasi penjumlahan dengan sifat untuk semua $r \in R$ dan $i \in I$ berlaku $ri \in I$ dan $ir \in R$.

Salah satu ideal yang punya tempat khusus pada banyak studi adalah ideal yang bisa diwakili oleh satu unsur, dan dinamakan ideal utama.

Definisi 5 (Fraleigh, 2013)

Misalkan R suatu ring, ideal yang dibangun oleh suatu unsur $a \in R$ dinamakan ideal utama, dan disimbolkan dengan $\langle a \rangle = \{ra | r \in R\}$.

Graf pembagi nol merupakan bentuk representasi geometri dari suatu gelanggang komutatif yang memiliki elemen pembagi nol. Berikut ini beberapa definisi terkait graf dan terminologinya.

Definisi 6 (Munir, 2010)

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tak kosong dari simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul. Dua buah simpul pada graf tak berarah G dikatakan bertetangga jika keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi.

Pada tulisan ini, graf yang dibahas hanyalah graf sederhana, yakni graf yang tidak memiliki gelang (tidak memiliki sisi yang menghubungkan simpul yang sama) dan tidak punya sisi ganda (dua buah simpul paling banyak dihubungkan dengan satu sisi). Beberapa jenis graf yang akan dibahas diberikan pada definisi berikut

Definisi 7 (Munir, 2010)

Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan buah n simpul dilambangkan dengan K_n.

Volume 3, No. 2, November 2022, Hal. 1-8 (e-ISSN 2776-0073)

Definisi 7 (Munir, 2010)

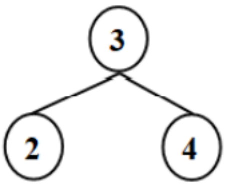
Graf yang himpunan simpulnya dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi di dalam G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 disebut graf bipartit dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$. Jika setiap simpul di V_1 dan V_2 saling terhubung, maka graf tersebut disebut graf bipartit lengkap.

Definisi 7 (Syarifudin dkk, 2020)

Jarak $d(u, v)$ antara dua simpul u dan v pada graf G adalah panjang lintasan terpendek dari simpul u ke v. Eksentrisitas $E(v)$ pada sebuah titik v dalam graf adalah jarak terjauh dari simpul v ke setiap simpul di G. Radius $r(G)$ dari G adalah eksentrisitas minimum pada setiap simpul di G, sedangkan diameter dari G dinotasikan $d(G)$ adalah eksentrisitas maksimum pada setiap titik G.

Gelanggang bilangan bulat modulo merupakan gelanggang komutatif dengan elemen satuan, berdasarkan definisi gelanggang bulat modulo dapat dinyatakan sebagai gelanggang $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2, \dots, n-1\}$. Untuk n bilangan prima, gelanggang $\mathbb{Z}_n$ tidak memiliki elemen pembagi nol karena merupakan daerah integral, sehingga tidak dapat diperoleh graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ untuk n bilangan prima. Untuk n bilangan komposit sebarang, maka n dapat dinyatakan sebagai $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$, dengan $p_1, p_2, \dots, p_m$ adalah bilangan prima yang berbeda, dan $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, maka gelanggang $\mathbb{Z}_n$ memiliki elemen pembagi nol, dan jumlah pembagi nolnya diperoleh sebanyak $n - n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right) - 1$. Berikut ini beberapa bentuk graf pembagi nol yang diperoleh dari gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_n$.

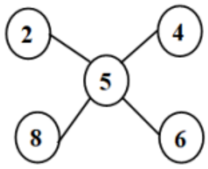
Pada gelanggang $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$, diperoleh himpunan semua pembagi nolnya adalah $Z(\mathbb{Z}_6) = \{2,3,4\}$ dengan $2.3 = 3.4 = 0$, maka 2 dan 4 saling bertetangga, sehingga diperoleh bentuk graf pembagi nol adalah:



Gambar 1. $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$

Dari gambar pertama ini diperoleh $e(2) = e(4) = 2$ dan $e(3) = 1$, sehingga didapatkan radius dan diameter graf berturut-turt $r\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_6}\right) = 1$ dan $d\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_6}\right) = 2$.

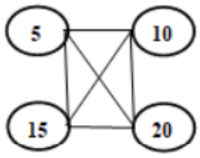
Pada gelanggang $\mathbb{Z}_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, diperoleh himpunan semua pembagi nolnya adalah $Z(\mathbb{Z}_{10}) = \{2,4,5,6,8\}$ dengan $2.5 = 4.5 = 5.8 = 0$, maka $2, 4$ dan 8 bertetangga dengan 5, sehingga diperoleh bentuk graf pembagi nol adalah:



Gambar 2. $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$

Dari gambar kedua ini diperoleh $e(2) = e(4) = e(6) = e(8) = 2$ dan $e(5) = 1$, sehingga didapatkan radius dan diameter graf berturut-turt $r\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{10}}\right) = 1$ dan $d\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{10}}\right) = 2$.

Pada gelanggang $\mathbb{Z}_{25} = \{0,1,2,\ldots,24\}$, diperoleh himpunan semua pembagi nolnya adalah $Z(\mathbb{Z}_{25}) = \{5,10,15,20\}$ dengan $5.10 = 5.20 = 5.15 = 10.20 = 10.15 = 15.20 = 0$, maka $5, 10,15$ dan 20 saling bertetangga, sehingga diperoleh bentuk graf pembagi nol adalah:



Gambar 3. $\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$

Dari gambar ketiga ini diperoleh $e(5) = e(10) = e(15) = e(20) = 1$, sehingga didapatkan radius dan diameter graf berturut-turt $r(\Gamma_{25}) = 1$ dan $d\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{25}}\right) = 1$.
Berdasarkan tiga contoh di atas bisa dilihat bahwa graf pembagi nol berkisar pada graf lengkap atau graf bipartit, hal ini ternyata berlaku umum untuk n tertentu.

Teorema 1.

Jika diberikan gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_n$, dengan $n = p^2$, dengan p bilangan prima ganjil, maka graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ adalah graf lengkap.

Bukti:

Misalkan diberikan gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_n$, dengan $n = p^2$, maka $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$. Ideal maksimal dari dibangun oleh p, yaitu $\langle p \rangle$. Sehingga himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_n$ yaitu $Z(\mathbb{Z}_n) = \langle p \rangle - \{0\}$. Dengan demikian untuk setiap $a, b \in Z(\mathbb{Z}_n)$ dapat dinyatakan $a = n_1 p$ dan $b = n_2 p$, untuk suatu $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Sehingga diperoleh $ab = n_1 n_2 p^2 = 0$, sehingga a bertetangga dengan b. Dengan demikian diperoleh graf pembagi nol dari adalah graf lengkap. ■

Teorema 2

Jika diberikan gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_n$, dengan $n = p_1 p_2$, dengan p_1 dan p_2 bilangan prima ganjil, maka graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ adalah graf bipartite lengkap.

Bukti:

Misalkan diberikan gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_n$, dengan $n = p_1 p_2$, dengan p_1 dan p_2 adalah bilangan prime berbeda, maka $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,\ldots,p_1 p_2 - 1\}$. Ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_n$ dibangun oleh p_1

dan p_2, yaitu $\langle p_1 \rangle$ dan $\langle p_2 \rangle$. Sehingga himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_n$ yaitu $Z(\mathbb{Z}_n) = \langle p_1 \rangle \cup \langle p_2 \rangle - \{0\}$. Dengan demikian $Z(\mathbb{Z}_n)$ dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan yaitu $V_1 = \langle p_1 \rangle - \{0\}$ dan $V_2 = \langle p_2 \rangle - \{0\}$. Karena p_1 dan p_2 bilangan prima yang berbeda, maka $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Sehingga untuk setiap $a \in V_1$ dan $b \in V_2$ berlaku $ab = (n_1p_1)(n_2p_2) = n_1n_2p_1p_2 = 0$. Sehingga a bertetangga dengan b. Dan untuk setiap $x, y \in V_1$, maka $x = \alpha_1 p_1$ dan $\alpha_2 p_1$ untuk suatu $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$. Karena $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ maka $x, y \notin V_2$, akibatnya p_2 tidak membagi x dan y. Sehingga $p_2$tidak membagi xy, dengan demikian $xy \neq 0$, dengan kata lain x dan y tidak bertetangga. Hal yang sama berlaku juga untuk setiap $w, z \in V_2$. Dengan demikian diperoleh graf pembagi nol dari adalah graf bipartit lengkap. ■

Dari beberapa contoh di atas, dapat diketahui bahwa untuk $n = p^2$ dengan p bilangan prima, maka eksentrisitas dari setiap simpul pada graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_n$ sama yaitu 1, karena merupakan graf lengkap. Sehingga radius dan diameternya sama dengan 1. Sedangkan untuk $n = p_1p_2$ dengan p_1 dan p_2 bilangan prima berbeda, diperoleh diameter dari graf pembagi nol sama dengan 2, yang dibuktikan pada teorema berikut.

Teorema 3

Jika diberikan gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_n$, dengan $n = p_1p_2$, dimana p_1 dan p_2 bilangan prima berbeda, maka diameter graf pembagi nol dari gelanggang adalah 2.

Bukti:

Misalkan $n = p_1p_2$, dengan p_1 dan p_2 adalah bilangan prima berbeda, maka $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2, \dots, p_1p_2 - 1\}$. Berdasarkan Teorema 2, diperoleh graf pembagi nol dari yaitu graf bipartit lengkap. Dengan kata lain $Z(\mathbb{Z}_n)$ dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan yaitu V_1 dan V_2. Sehingga untuk setiap $a, b \in Z(\mathbb{Z}_n)$, jika a dan b ada pada partisi yang berbeda maka a dan b bertetangga, akibatnya $d(a, b) = 1$. Jika a dan b ada pada partisi yang sama, maka a dan b tidak terhubung langsung, tetapi pasti ada simpul c yang menghubungkan a dan b, akibatnya $d(a, b) = 2$. Dengan demikian, diameter graf pembagi nol dari gelanggang adalah 2. ■

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, dapat diambil kesimpulan mengenai beberapa karakteristik graf pembagi nol pada gelanggang bilangan bulat modulo n sebagai berikut:

1. Jika $n = p^2$ dengan p bilangan prima ganjil, maka graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ berbentuk graf lengkap.
2. Jika $n = p_1p_2$, dengan p_1 dan p_2 bilangan prima berbeda, maka graf pembagi nol dari $\mathbb{Z}_n$ adalah graf bipartit lengkap, dan diameter dari graf tersebut ialah 2.

Saran untuk penelitian selanjutnya ialah perlu dilakukan penelitian bentuk-bentuk graf pembagi nol pada gelanggang yang lebih kompleks dan juga ideal-idealnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. (2017). Radius, Diameter, Multiplisitas Sikel, dan Dimensi Metrik Graf Komuting dari Grup Dihedral. *Jurnal Matematika "Mantik"*, 3(1), 1-4.

Asmarani, E. Y., Syarifudin, A. G., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2021). The Power Graph of a Dihedral Group. *Eigen Mathematics Journal* 4(2), 80-85.

Gazir, A., & Wardhana, I. G. A. W. (2019). Subgrup Non Trivial Dari Grup Dihedral. *Eigen Mathematics Journal* 1(2), 73-76.

Fraleigh, J. B. (2014). *A First Course in Abstract Algebra* (7th ed.). United States of America: Pearson Education Limited.

Husni, M. N., Syafitri, H., Siboro, A. M., Syarifudin, A. G., Aini, Q., & Wardhana, I. G. A. W. (2022). The harmonic index and the gutman index of coprime graph of integer group modulo with order of prime power. *Barekeng*: *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 16(3), 961-966.

Misuki, W. U., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Irwansyah. (2021, February). *Some results of non-coprime graph of the dihedral group D 2 n for na prime power*. In AIP Conference Proceedings (Vol. 2329, No. 1, p. 020005). AIP Publishing LLC.

Munir, Rinaldi. (2010). *Matematika Diskrit. Bandung*: Penerbit Informatika Bandung.

Nurhabibah, N., Syarifudin, A. G., & Wardhana, I. G. A. W. (2021). Some Results of The Coprime Graph of a Generalized Quaternion Group Q_4n. *InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 3(1), 29-33.

Nurhabibah, N., Syarifudin, A. G., Wardhana, I. G. A. W., & Aini, Q. (2021). The Intersection Graph of a Dihedral Group. *Eigen Mathematics Journal*, 4(2), 68-73.

Nazzal, K.& Ghanem, M. (2014). Some Properties of The Zero Divisor Graph of A Commutative Ring. *Discussion Mathematicae General Algebra and Applications*, 34(1), 167-181.

Ramdani, D. S., Wardhana, I. G. A. W., & Awanis, Z. Y. (2022). The intersection graph representastion of a dihedral group with prime order and its numerical invariants. *Barekeng*: *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 16(3), 1013-1020.

Syarifudin, A. G., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2021, March). *The Clique Numbers and Chromatic Numbers of The Coprime Graph of a Dihedral Group*. In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (Vol. 1115, No. 1, p. 012083). IOP Publishing.

Syarifudin, A. G., & Wardhana, I. G. A. W. (2021). Beberapa Graf Khusus Dari Grup Quaternion. *Eigen Mathematics Journal*, 4(1), 1-7.

Syarifudin, A. G., Malik, D. P., & Wardhana, I. G. A. W. (2021). *Some characterizatsion of coprime graph of dihedral group D 2n*. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1722, No. 1, p. 012051). IOP Publishing.

Syarifudin, A. G., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2020, July). *The Degree, Radius, and Diameter of Coprime Graph of Dihedral Group*. In Proceeding International Conference on Science (ICST) (Vol. 1, No. 1, pp. 149-154).

Wicaksono, S. A. & Soleha. (2013). Kajian Sifat-Sifat Graf Pembagi-nol dari Ring Komutatif dengan Elemen Satuan. *Jurnal Sains dan Seni POMITS*, 2(1), 1-5.